

Les nombres complexes

1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{R} . On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté i , solution de cette équation.

On va construire un ensemble noté \mathbb{C} plus grand que \mathbb{R} qu'est engendré par le couple $(1, i)$ (càd. tout élément de \mathbb{C} est combinaison linéaire de 1 et i à coefficients dans \mathbb{R}).

Définition :

L'ensemble \mathbb{C} est définie par : $\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$.

* $a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élément de \mathbb{C}) de z .

* a s'appelle la partie réelle de z sera notée $\Re(z)$.

* b s'appelle la partie imaginaire de z sera notée $\Im(z)$.

* L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté $i\mathbb{R}$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$z = z' \iff \Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) = \Im(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0 \quad z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0$$

La représentation graphique d'un nombre complexe :

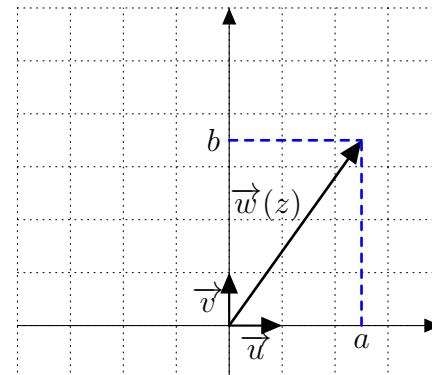
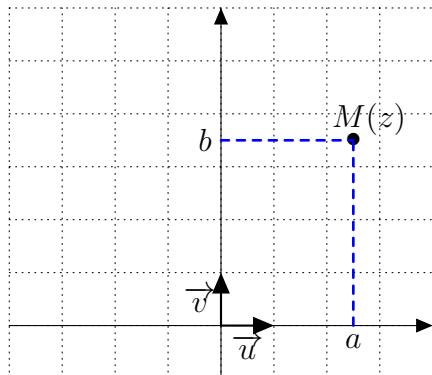
Le plan (P) (appelé après le plan complexe) minue d'un repère orthonormé directe (O, \vec{u}, \vec{v}) .

* Tout point $M(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $M(z)$.

De plus z s'appelle l'affixe de M et on écrit $z = \text{aff}(M)$.

* Tout vecteur $\vec{w}(a, b)$ du plan (P) est une image d'un unique nombre complexe $z = a + ib$, on écrit $\vec{w}(z)$.

De plus z s'appelle l'affixe de \vec{w} et on écrit $z = \text{aff}(\vec{w})$.



Conséquences :

* Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.

* Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé l'axe imaginaire.

Proposition :

Soient $A(z_A), B(z_B), \vec{w}(z_{\vec{w}}), \vec{t}(z_{\vec{t}})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a :

$$\text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad \text{aff}(\vec{w} + \vec{t}) = \text{aff}(\vec{w}) + \text{aff}(\vec{t}) \quad ; \quad \text{aff}(\alpha \vec{w}) = \alpha \cdot \text{aff}(\vec{w})$$

Proposition :

Soient $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ et $I(z_I)$ telle que I est le milieu de $[AB]$. On a :

$$\star z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad \star \text{Si } A, B \text{ et } C \text{ sont distincts, alors : } A, B \text{ et } C \text{ sont rectilignes} \Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe tel que $a, b \in \mathbb{R}$. Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- ★ $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et en général : $\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k$.
- ★ $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ et en général : $\prod_{k=1}^n z_k = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k$.
- ★ Si $z' \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.
- ★ $\overline{(z^n)} = \bar{z}^n$.

Conséquences :

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\Re(z) & ; \quad z - \bar{z} &= 2i\Im(z) & ; \quad \bar{\bar{z}} &= z & ; \quad \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ & ; \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z & ; \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z & ; \end{aligned}$$

Définition :

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soit $M(z)$ un point du plan complexe tel que $z = a + ib$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

Le module du nombre complexe z est la distance OM sera noté $|z|$ et on a : $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- ★ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et en général : $\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$.
- ★ Si $z' \neq 0$, alors $\left| \frac{1}{z'} \right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- ★ $|z^n| = |z|^n$.
- ★ $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Conséquences :

- ★ $z\bar{z} = |z|^2$
- ★ $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- ★ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- ★ $z = z' \Rightarrow |z| = |z'|$.
- ★ Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ du plan complexe, on a : $AB = |z_B - z_A|$.

3 L'argument et la forme trigonométrique d'un nombre complexe

Définition :

Soit $M(z)$ dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe (O, \vec{u}, \vec{v}) , tel que $z \neq 0$.

On appelle argument de z qu'on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle orientée $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ en radian et on écrit $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$.

Remarque :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

Proposition :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

- ★ $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$ et en général : $\arg \left(\prod_{k=1}^n z_k \right) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k)$.
- ★ $\arg \left(\frac{1}{z'} \right) \equiv -\arg(z')[2\pi]$
- ★ $\arg \left(\frac{z}{z'} \right) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- ★ $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi]$

Proposition :

Soient $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$ des points du plan complexe $C \neq D$ on a :

- ★ Si $A \neq B$ on a : $\overrightarrow{(A, B)} \equiv \arg(b - a)[2\pi]$.
- ★ Si $A \neq B$ et $A \neq C$ on a : $\overrightarrow{(A, B), \overrightarrow{(A, C)}} \equiv \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)[2\pi]$.
- ★ Si $A \neq B$ et $C \neq D$ on a : $\overrightarrow{(A, B), \overrightarrow{(C, D)}} \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)[2\pi]$.

Remarques :

- ★ $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*)$: $\arg(z) \equiv 0[2\pi]$.
- ★ $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*)$: $\arg(z) \equiv \pi[2\pi]$.
- ★ $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*)$: $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
- ★ $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*)$: $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z = a + ib$ s'écrit sous la forme $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$ où $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$ et $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$.

Définition :

L'écriture $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$ s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe z et on note $z = [r, \alpha]$.

(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument)

Proposition :

Soient $z = [r, \alpha]$ et $z = [r', \alpha']$ de \mathbb{C}^* et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} -z &= [r, \alpha + \pi] & \bar{z} &= [r, -\alpha] & zz' &= [rr', \alpha + \alpha'] & \frac{1}{z} &= \left[\frac{1}{r}, -\alpha \right] \\ \frac{z}{z'} &= \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha' \right] & z^n &= [r^n, n \times \alpha] \end{aligned}$$

La formule de Moivre

Pour tout couple $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a : $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$.

Remarque :

La formule de Moivre sert à calculer $\cos(n\alpha)$ et $\sin(n\alpha)$ en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

4

La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définition :

- ★ Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on note par $e^{i\alpha}$ le nombre complexe $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$ et on écrit $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = e^{i\alpha}$.
- ★ Pour tout nombre complexe non nul z , on appelle la notation exponentielle la notation $re^{i\alpha}$ où $z = [r, \alpha]$ et on écrit $z = re^{i\alpha}$.

Proposition :

Pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\star \overline{e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} \quad \star (e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad \star e^{i\alpha} e^{i\alpha'} = e^{i(\alpha+\alpha')} \quad \star \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} = e^{i(\alpha-\alpha')}$$

Proposition :

Les formules d'Euler :

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

Remarque :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ ou $\cos^n(x)\sin^m(x)$. Càd les transformées en somme des termes de types $a\cos(kx) + b\sin(kx)$ en développant $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$.

Exemples :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x) \quad \sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

5

Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

Définition :

Soient u un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

On dit que le nombre complexe z est une racine n-ième (ou racine d'ordre n) du nombre complexe u si $z^n = u$.

Proposition :

Tout nombre complexe non nul $z = re^{i\alpha}$ tel que $r > 0$, admet n racines n-ièmes qui sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Proposition :

La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle. $\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0\right)$

Conséquences :

- ★ Les racines n-ièmes de l'unité sont : $u_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- ★ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- ★ Les racines cubiques de l'unité sont : $1, j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et \bar{j} .
- ★ Les racines 4-ièmes de l'unité sont $1, -1, i$ et $-i$.

Proposition :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad ; \quad \bar{j} = j^2 \quad ; \quad j^3 = (\bar{j})^3 = 1 \quad ; \quad j\bar{j} = 1$$

Proposition :

Toute équation $az^2 + bz + c = 0$ tels que $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ admet :

- ★ une solution double $z = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
- ★ deux solutions différentes $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ si $\Delta \neq 0$ avec δ est une racine carrée de Δ .

Conséquences :

Si z_1 et z_2 sont les deux solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) alors :

- ★ $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$ pour tout z de \mathbb{C} .
- ★ $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

6

Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

 $M'(z')$ est l'image de $M(z)$ par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\vec{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport k	$\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle θ $(M \neq \Omega)$	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases} z' - w = z - w \\ \arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta [2\pi] \\ \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w \end{cases}$