

## Les nombres complexes

### 1 L'ensemble des nombres complexes

L'équation  $x^2 = -1$  n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ . On imagine qu'il existe un nombre imaginaire noté  $i$ , solution de cette équation.

On va construire un ensemble noté  $\mathbb{C}$  plus grand que  $\mathbb{R}$  qu'est engendré par le couple  $(1, i)$  (càd. tout élément de  $\mathbb{C}$  est combinaison linéaire de 1 et  $i$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ ).

**Définition :**

L'ensemble  $\mathbb{C}$  est définie par :  $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$ .

★  $a + ib$  s'appelle l'écriture algébrique (unique pour tout élément de  $\mathbb{C}$ ) de  $z$ .

★  $a$  s'appelle la partie réelle de  $z$  sera notée  $\Re(z)$ .

★  $b$  s'appelle la partie imaginaire de  $z$  sera notée  $\Im(z)$ .

★ L'ensemble des nombres imaginaires pures sera noté  $i\mathbb{R}$ .

**Proposition :**

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  :

$$z = z' \iff \Re(z) = \Re(z') \text{ et } \Im(z) = \Im(z')$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \Im(z) = 0$$

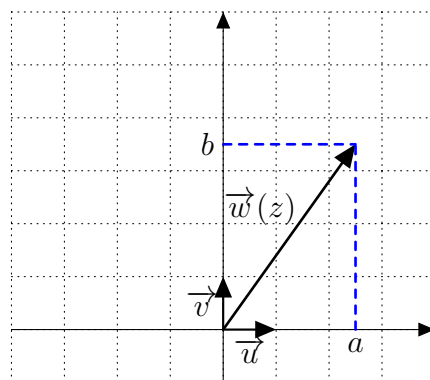
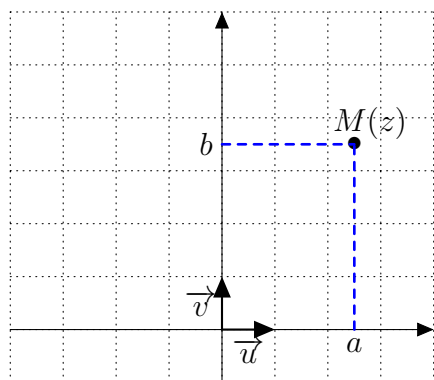
$$z \in i\mathbb{R} \iff \Re(z) = 0$$

### La représentation graphique d'un nombre complexe :

Le plan  $(P)$  (appelé après le plan complexe) muni d'un repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

★ Tout point  $M(a, b)$  du plan  $(P)$  est une image d'un unique nombre complexe  $z = a + ib$ , on écrit  $M(z)$ .  
De plus  $z$  s'appelle l'afixe de  $M$  et on écrit  $z = aff(M)$ .

★ Tout vecteur  $\vec{w}(a, b)$  du plan  $(P)$  est une image d'un unique nombre complexe  $z = a + ib$ , on écrit  $\vec{w}(z)$ .  
De plus  $z$  s'appelle l'afixe de  $\vec{w}$  et on écrit  $z = aff(\vec{w})$ .



**Conséquences :**

★ Les nombres réels sont les affixes des points de l'axe des abscisses appelé l'axe réel.

★ Les nombres imaginaires pures sont les affixes des points de l'axe des ordonnées appelé l'axe imaginaire.

**Proposition :**

Soient  $A(z_A), B(z_B), \vec{w}(z_{\vec{w}}), \vec{t}(z_{\vec{t}})$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On a :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A \quad ; \quad aff(\vec{w} + \vec{t}) = aff(\vec{w}) + aff(\vec{t}) \quad ; \quad aff(\alpha \vec{w}) = \alpha \cdot aff(\vec{w})$$

**Proposition :**

Soient  $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$  et  $I(z_I)$  telle que  $I$  est le milieu de  $[AB]$ . On a :

$$\star z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \quad \star \text{ Si } A, B \text{ et } C \text{ sont distincts, alors : } A, B \text{ et } C \text{ sont rectilignes} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R}$$

## 2 Conjugué d'un nombre complexe - module d'un nombre complexe

### Définition :

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe tel que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Le conjugué de  $z$  est le nombre complexe  $\bar{z} = a - ib$ .

### Proposition :

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \star \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z'} \text{ et en général : } \overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k. & \star \overline{z \times z'} &= \bar{z} \times \bar{z'} \text{ et en général : } \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k. \\ \star \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} &= \frac{1}{\bar{z'}} \text{ et } \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}. & \star \overline{(z^n)} &= \bar{z}^n. \end{aligned}$$

### Conséquences :

Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\Re(z) & ; & & z - \bar{z} &= 2i\Im(z) & ; & & \bar{\bar{z}} &= z & ; & & \bar{z} = 0 &\Leftrightarrow z = 0 \\ & & ; & & z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = z & ; & & z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \bar{z} = -z & ; & & \end{aligned}$$

### Définition :

Le plan complexe minue d'un repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $M(z)$  un point du plan complexe tel que  $z = a + ib$  et  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Le module du nombre complexe  $z$  est la distance  $OM$  sera noté  $|z|$  et on a :  $OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### Proposition :

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \star |z \times z'| &= |z| \times |z'| \text{ et en général : } \left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|. \\ \star \text{ Si } z' \neq 0, \text{ alors } \left| \frac{1}{z'} \right| &= \frac{1}{|z'|} \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}. & \star |z^n| &= |z|^n. & \star |z + z'| &\leq |z| + |z'|. \end{aligned}$$

### Conséquences :

$$\begin{aligned} \star z\bar{z} &= |z|^2 & \star |\bar{z}| &= |-z| = |z| & \star |z| &= 0 \Leftrightarrow z = 0 & \star z = z' &\Rightarrow |z| = |z'|. \\ \star \text{ Soient } A(z_A) \text{ et } B(z_B) \text{ du plan complexe, on a : } & AB &= |z_B - z_A|. \end{aligned}$$

## 3 L'argument et la forme trigonométrique d'un nombre complexe

### Définition :

Soit  $M(z)$  dans le plan complexe, minue d'un repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , tel que  $z \neq 0$ .

On appelle argument de  $z$  qu'on note  $\arg(z)$  toute mesure de l'angle orientée  $(\vec{u}, \vec{OM})$  en radian et on écrit  $\arg(z) \equiv (\vec{u}, \vec{OM})[2\pi]$ .

### Remarque :

0 est le seul nombre complexe qui n'a pas d'argument.

### Proposition :

Soient  $z, z' \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \star \arg(zz') &\equiv \arg(z) + \arg(z')[2\pi] \text{ et en général : } \arg\left(\prod_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \arg(z_k). \\ \star \arg\left(\frac{1}{z'}\right) &\equiv -\arg(z')[2\pi] & \star \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi] & \star \arg(z^n) &\equiv n \arg(z)[2\pi] \end{aligned}$$

### Proposition :

Soient  $A(a)$ ,  $B(b)$ ,  $C(c)$  et  $D(d)$  des points du plan complexe  $C \neq D$  on a :

- ★ Si  $A \neq B$  on a :  $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$ .
- ★ Si  $A \neq B$  et  $A \neq C$  on a :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$ .
- ★ Si  $A \neq B$  et  $C \neq D$  on a :  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$ .

### Remarques :

- ★  $(\forall z \in \mathbb{R}_+^*) : \arg(z) \equiv 0[2\pi]$ .
- ★  $(\forall z \in \mathbb{R}_-^*) : \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$ .
- ★  $(\forall z \in i\mathbb{R}_+^*) : \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .
- ★  $(\forall z \in i\mathbb{R}_-^*) : \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

### Proposition :

Tout nombre complexe non nul  $z = a+ib$  s'écrit sous la forme  $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$  où  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$  et  $\sin(\alpha) = \frac{b}{r}$ .

### Définition :

L'écriture  $z = r[\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)]$  s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  et on note  $z = [r, \alpha]$ .

(ie. tout nombre complexe non nul est bien déterminé par son module et son argument )

### Proposition :

Soient  $z = [r, \alpha]$  et  $z' = [r', \alpha']$  de  $\mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On a :

$$\begin{aligned} -z &= [r, \alpha + \pi] ; & \bar{z} &= [r, -\alpha] ; & zz' &= [rr', \alpha + \alpha'] ; & \frac{1}{z} &= \left[\frac{1}{r}, -\alpha\right] \\ \frac{z}{z'} &= \left[\frac{r}{r'}, \alpha - \alpha'\right] ; & z^n &= [r^n, n\alpha] \end{aligned}$$

### La formule de Moivre

Pour tout couple  $(n, \alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$  on a :  $(\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$ .

### Remarque :

La formule de Moivre sert à calculer  $\cos(n\alpha)$  et  $\sin(n\alpha)$  en fonction de  $\cos(\alpha)$  et  $\sin(\alpha)$ .

4

### La notation exponentielle d'un nombre complexe non nul.

### Définition :

- ★ Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  on note par  $e^{i\alpha}$  le nombre complexe  $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$  et on écrit  $\cos(\alpha) + i \sin(\alpha) = e^{i\alpha}$ .
- ★ Pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on appelle la notation exponentielle la notation  $re^{i\alpha}$  où  $z = [r, \alpha]$  et on écrit  $z = re^{i\alpha}$ .

### Proposition :

Pour tous  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{aligned} \star \overline{e^{i\alpha}} &= e^{-i\alpha} & \star (e^{i\alpha})^n &= e^{in\alpha} & \star e^{i\alpha} e^{i\alpha'} &= e^{i(\alpha+\alpha')} & \star \frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha'}} &= e^{i(\alpha-\alpha')} \end{aligned}$$

### Proposition :

Les formules d'Euler :

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

et

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

### Remarque :

On utilise les formules d'Euler dans la linéarisation de  $\cos^n(x)$  ou  $\sin^n(x)$  ou  $\cos^n(x)\sin^m(x)$ . Càd les transformées en somme des termes de types  $a\cos(kx) + b\sin(kx)$  en développant  $\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^n$  ou  $\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^n$ .

### Exemples :

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

$$\sin^4(x) = \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$$

5

## Les racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul.

### Définition :

Soient  $u$  un nombre complexe non nul et  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq 2$ .

On dit que le nombre complexe  $z$  est une racine n-ième (ou racine d'ordre  $n$ ) du nombre complexe  $u$  si  $z^n = u$ .

### Proposition :

Tout nombre complexe non nul  $z = re^{i\alpha}$  tel que  $r > 0$ , admet  $n$  racines n-ièmes qui sont :

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

### Proposition :

La somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul est nulle.  $\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = 0\right)$

### Conséquences :

- ★ Les racines n-ièmes de l'unité sont :  $u_k = e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
- ★ Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- ★ Les racines cubiques de l'unité sont :  $1, j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $\bar{j}$ .
- ★ Les racines 4-ièmes de l'unité sont  $1, -1, i$  et  $-i$ .

### Proposition :

$$1 + j + j^2 = 0 \quad ; \quad \bar{j} = j^2 \quad ; \quad j^3 = (\bar{j})^3 = 1 \quad ; \quad j\bar{j} = 1$$

### Proposition :

Toute équation  $az^2 + bz + c = 0$  tels que  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $b, c \in \mathbb{C}$  admet :

- ★ une solution double  $z = -\frac{b}{2a}$  si  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ .
- ★ deux solutions différentes  $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$  si  $\Delta \neq 0$  avec  $\delta$  est une racine carrée de  $\Delta$ .

### Conséquences :

Si  $z_1$  et  $z_2$  sont les deux solutions de l'équation  $az^2 + bz + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) alors :

- ★  $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$  pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ .
- ★  $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$  et  $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ .

6 Les transformations dans le plan et les nombres complexes .

$M'(z')$  est l'image de  $M(z)$  par une transformation dans le plan.

Nature de la transformation	Définition	Description complexe
une translation du vecteur $\vec{u}(b)$	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + b$
une homothétie de centre $\Omega(w)$ et de rapport $k$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - w) + w$
une rotation de centre $\Omega(w)$ et d'angle $\theta$  ( $M \neq \Omega$ )	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ \arg(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$	$\begin{cases}  z' - w  =  z - w  \\ \arg\left(\frac{z' - w}{z - w}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow z' = e^{i\theta}(z - w) + w$