

## Cours et exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

# NOMBRES COMPLEXES

## I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

### 1) Définition d'un nombre complexe.

**1.1 L'ensemble  $\mathbb{C}$  ; définition et vocabulaire:** On admet qu'il existe un ensemble noté  $\mathbb{C}$  ses éléments s'appellent des nombres complexes qui vérifie :

1)  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2) On définit dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des nombres réels.

3) L'ensemble  $\mathbb{C}$  contient un nombre non réel noté  $i$  et qui vérifie  $i^2 = -1$

4) Tout nombre complexe  $z$  s'écrit et de façon unique comme :  $z = a + ib$  où  $a$  et  $b$  sont des réels

5) Le réel  $a$  s'appelle la partie réel du nombre complexe  $z$  ; on écrit :  $a = \text{Re}(z)$

6) Le réel  $b$  s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe  $z$  ; on écrit :  $b = \text{Im}(z)$

7) L'écriture :  $z = a + ib$  s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe  $z$ .

### Exemples

• Les nombres  $-1$  ;  $0$  ;  $3/4$  ;  $\sqrt{2}$  sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de  $\mathbb{C}$ .

• À l'aide du nombre  $i$  et de la multiplication :  $-i$  ;  $2i$  ;  $i\sqrt{2}$  ... sont aussi dans  $\mathbb{C}$ .

• Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans  $\mathbb{C}$  :  $-1+i$  ;  $\sqrt{2}+2i$

**THÉORÈME :** Soient  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$  deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

### PREUVE :

Soient  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$  deux complexes tels que  $z = z'$

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x - x' = i(y' - y)$$

Raisonnons par l'absurde : si  $y' - y \neq 0$  alors

$$i = \frac{x - x'}{y' - y} \text{ étant un réel, on aboutit à une}$$

contradiction. Donc :  $y' = y$  et on déduit alors

$$x - x' = 0 \text{ donc : } x = x'$$

La réciproque est claire.

**Remarque :**  $z = x + iy$  et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$1) x + iy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 2) z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z) = \text{Im}(z') \end{cases}$$

### 1.3 Remarque :

1) L'ensemble  $\mathbb{R}$  est totalement ordonné, c'est-à-dire :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

2) L'ensemble des nombres complexes n'est pas ordonné.

### 1.4 Des sous-ensembles de $\mathbb{C}$

1) L'ensemble  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels est une partie de  $\mathbb{C}$  ;  $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$$

2) L'ensemble  $i\mathbb{R}$  est une partie de  $\mathbb{C}$ , s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ;  $i\mathbb{R} = \{iy / y \in \mathbb{R}\}$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0$$

3)  $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$  et  $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

( $\subsetneq$  veut dire strictement inclus strictement :

$$2 + 3i \notin \mathbb{R} \text{ et } 2 + 3i \notin i\mathbb{R})$$

## II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{C}$ .

### 1) L'addition dans $\mathbb{C}$ .

#### 1.1 Définition

**Définition :** Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes  $z$  et  $z'$  est le nombre complexe noté  $z + z'$  définie par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

On en déduit que :  $\text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z')$  et

$$\text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z')$$

## 1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  est :

1) Associative :  $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$

$$((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$$

2) Commutative :  $(\forall (z, z' \in \mathbb{C}^2))(z + z' = z' + z)$

3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans  $\mathbb{C}$  :

$$(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$$

4) Chaque élément  $z$  dans  $\mathbb{C}$  a un symétrique appelé

l'opposé de  $z$  noté  $(-z)$  ;  $z + (-z) = (-z) + z = 0$

On dit que  $\mathbb{C}$  muni de l'addition est un groupe

commutatif, on le note par :  $(\mathbb{C}, +)$

## 1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes tels que :

$z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  La différence de  $z$  et  $z'$  est la

somme de  $z$  avec le symétrique de  $z'$  c'est-à-dire :

$z + (-z')$  qu'on la note :  $z - z'$

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

## 2) La multiplication dans $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Définition :

Comme la multiplication dans  $\mathbb{C}$  prolonge celle dans

$\mathbb{R}$  on peut définir la multiplication dans  $\mathbb{C}$

par : Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres

complexes.

Le produit des nombres complexes  $z$  et  $z'$  est le

nombre complexe noté  $z \times z'$  définie par :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + ib'a' + bb'i^2$$

$$i^2 = -1$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

### 2.2 Propriétés :

La multiplication dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  est :

1) Associative :  $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3)$

$$((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$$

2) Commutative :  $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$

3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication

dans  $\mathbb{C}$  :  $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$

4) Chaque élément non nul  $z$  dans  $\mathbb{C}$  a un

symétrique appelé l'inverse de  $z$  noté :  $(\frac{1}{z})$  ou  $z^{-1}$

$$\text{Et on a } z \times \frac{1}{z} = 1$$

On dit que  $\mathbb{C}^*$  muni de la multiplication est un groupe

commutatif, on le note par :  $(\mathbb{C}^*, \times)$

En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la

multiplication dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  il y a une propriété

commune entre les deux opérations :

5) La multiplication est distributive par rapport à

l'addition dans  $\mathbb{C}$  :

$$(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) (z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$$

**Définition :** Puisque  $(\mathbb{C}, +)$  est un groupe commutatif et  $(\mathbb{C}^*, \times)$  est un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans  $\mathbb{C}$ ; on dit que  $(\mathbb{C}, +, \times)$  est un corps commutatif.

## 2.3 Le quotient de deux complexes.

Soient  $z = a + ib$  et  $z' = a' + ib'$  deux nombres

complexes où  $z' \neq 0$  le quotient des nombres  $z$  et  $z'$

est le produit de  $z$  et de l'inverse de  $z'$  et se note

$$\frac{z}{z'} \text{ ou } z(z'^{-1})$$

## 2.3 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C}, +, \times)$  étant un corps commutatif ; toutes les règles

de calculs qu'on a connu dans  $\mathbb{R}$  sont vraies dans  $\mathbb{C}$ .

1)  $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$  ou  $z' = 0$

2)  $z^0 = 1$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(z^n = \underbrace{z \times z \times \dots \times z}_n) n \text{ fois}$

$$3) z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$4) z^{n+m} = z^n \times z^m$$

$$5) z^{n-m} = z^n / z^m$$

$$6) (z^n)^m = z^{n \times m}$$

$$7) z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \dots + z^1z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$$

$$8) \text{ Si } z \neq 1 \text{ alors : } S = 1 + z^1 + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$$\text{somme des termes d'une suite géométrique}$$

$$9) (z + z_1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z_1^{n-k} \text{ formule de binôme}$$

**Application :** Trouver la forme algébrique et

déterminer la parties réelles et imaginaires des

nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

**Solution : 1)**

$$z_1 = -6 + 5i = a + bi \text{ donc } \text{Re}(z_1) = -6 \text{ et } \text{Im}(z_1) = 5$$

$$2) z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

$$\text{car } \text{Im}(z_2) = 0$$

$$3) z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \text{ donc } \operatorname{Re}(z_1) = \frac{3}{5} \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = -\frac{4}{5}$$

$$4) z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i\frac{5}{13}$$

$$5) z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car  $\operatorname{Re}(z_5) = 0$

### REMARQUES :

Lorsque  $\operatorname{Im}(z) = 0$ ,  $z = a$  est réel.

Lorsque  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ,  $z = ib$  est appelé imaginaire pur.

### III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

#### 1) L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plan  $(\mathcal{P})$  est muni du repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$  ; et soit  $\mathcal{V}_2$  le plan vectoriel associé à  $(\mathcal{P})$ . Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe le couple  $(a, b)$  est associé à un point unique  $M$  dans le plan  $(\mathcal{P})$ .

L'application :  $\mathbb{C} \rightarrow (\mathcal{P})$

$$z \mapsto M(a, b)$$

où  $a = \operatorname{Re}(z)$  et  $b = \operatorname{Im}(z)$  est une bijection

1) Le point  $M$  s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan  $(\mathcal{P})$ , et l'application

2) Le complexe  $z$  s'appelle l'affixe du point  $M$  on écrit :  $z = \operatorname{aff}(M)$  et on écrit :  $z_M = a + ib$

3) L'application :  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$$z \mapsto \vec{u} (a; b)$$

où  $a = \operatorname{Re}(z)$  et  $b = \operatorname{Im}(z)$  est une bijection

4) Le vecteur  $\vec{u}$  s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan  $(\mathcal{P})$

5) Le complexe  $z$  s'appelle l'affixe du vecteur  $\vec{u}$  on

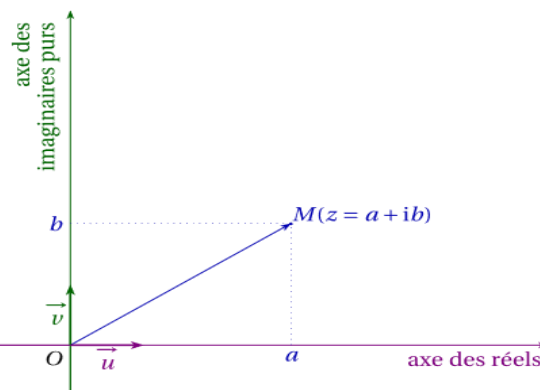
écrit :  $z = \operatorname{aff}(\vec{u})$  on écrit :  $z_u = a + ib$

6) Le plan  $(\mathcal{P})$  s'appelle un plan complexe

7) a) L'axe  $(O; \vec{u})$  s'appelle l'axe des réels

b) L'axe  $(O; \vec{v})$  s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère  $\mathcal{R}(O; \vec{u}; \vec{v})$



### REMARQUES :

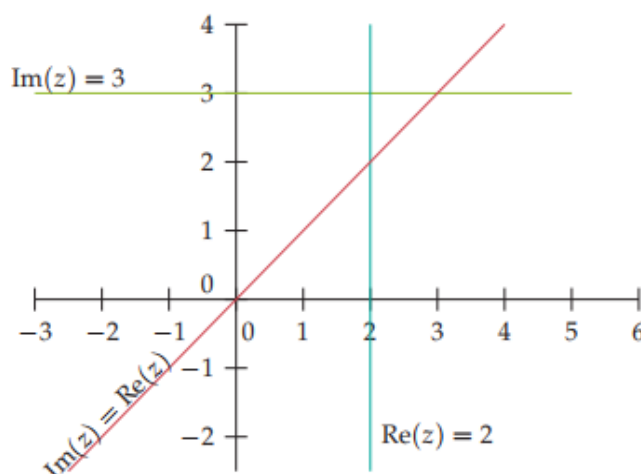
1) Les complexes  $z = a \in \mathbb{R}$  sont des nombres réels et sont représentés sur l'axe des Réels.

2) Les complexes  $z = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$  sont des imaginaires purs et sont représentés sur l'axe des imaginaires purs.

3) Le plan est alors appelé plan complexe.

**Exemple 1 :** Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe  $z$  tels que

- $\operatorname{Re}(z) = 2$
- $\operatorname{Im}(z) = 3$
- $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$ .



### 2) Les opérations sur les affixes.

**Propriété :** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs dans  $\mathcal{V}_2$  ;  $M$  et  $N$  deux points dans le plan  $(\mathcal{P})$  et  $\alpha$  un réel ; On a :

$$1) \operatorname{aff}(A) = \operatorname{aff}(B) \Leftrightarrow A = B$$

$$\text{et } \operatorname{aff}(\vec{u}) = \operatorname{aff}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

$$2) \operatorname{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{aff}(\vec{u}) + \operatorname{aff}(\vec{v})$$

$$3) \operatorname{aff}(\alpha \vec{u}) = \alpha \times \operatorname{aff}(\vec{u})$$

$$4) \operatorname{aff}(\vec{AB}) = \operatorname{aff}(B) - \operatorname{aff}(A) = z_B - z_A$$

### Propriété :

1) Soient  $[AB]$  un segment de milieu  $I$  ; on a :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

2) Si  $G = \text{Bar}\{(A_k, \alpha_k) | 1 \leq k \leq n\}$  et  $z_k = \text{aff}(A_k)$

$$\text{alors : } z_G = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

3) Cas particuliers 2 points pondérés :

$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \text{ on a } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

4) Cas particuliers 3 points pondérés :

$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  on a :

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

### 3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du plan d'affixes

respectifs :  $z_A, z_B$  et  $z_C$

On sait que :

$A, B$  et  $C$  sont alignés  $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB})$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \left( \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha \right) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

**Propriété :** Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts du

plan d'affixes respectifs  $z_A, z_B$  et  $z_C$

les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

**Exemple1 :** soient dans le plan complexe les

points :  $A(1+i)$  et  $B\left(\frac{1}{2} + 2i\right)$  et  $C(-1-i)$

Montrer que les les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.

**Solutions :**

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés

**Exemple2 :** soient dans le plan complexe les

points :  $A(2;-3)$  et  $B(1;1)$  et  $C(1;2)$

1) Déterminer les affixes des points  $A$  et  $B$  et  $C$  ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$

3) Déterminer l'affixe de  $I$ , milieu de  $[AB]$ .

4) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de  $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point  $D$  pour que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

**Solutions :** 1) l'affixe du point  $A$  est  $z_A = 2 - 3i$

l'affixe du point  $B$  est  $z_B = 1 + i$

l'affixe du point  $C$  est  $z_C = 1 + 2i$

2)  $\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = \text{aff}(B) - \text{aff}(A) = z_B - z_A$

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (1 + i) - (2 - 3i) = -1 + 4i$$

$$3) z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2 - 3i + 1 + i}{2} = \frac{3 - 2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

$$4) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1 + 2i) - (2 - 3i)}{(1 + i) - (2 - 3i)} = \frac{-1 + 5i}{-1 + 4i} = \frac{(-1 + 5i)(-1 - 4i)}{(-1 - 4i)(-1 + 4i)} = \frac{1 + 4i - 5i + 20}{(-1)^2 - (4i)^2} = \frac{21 - i}{17}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21 - i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

5) le barycentre de  $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$  ?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2 - 1 + 3}$$

$$z_G = \frac{2(2 - 3i) - 1(1 + i) + 3(1 + 2i)}{2 - 1 + 3} = \frac{6 - i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6)  $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement

Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  c'est-à-dire :  $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

### Exercice 1 :

soient dans le plan complexe les points :

A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = 2 - i \text{ et } z_D = -2i \text{ et}$$

$$z_E = 2$$

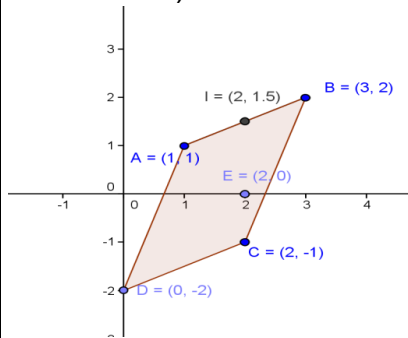
1) Représenter ces points dans le plan complexe

2) Déterminer l'affixe de I milieu de [AB].

3) Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$

4) montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

**Solution : 1)**



I milieu de [AB]. Donc :  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  donc  $z_I - z_A = z_B - z_I$

$$\text{Donc : } z_I = \frac{z_B + z_A}{2} \text{ donc : } z_I = \frac{3 + 2i + 1 + i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } I\left(2; \frac{3}{2}\right)$$

$$3) z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$$

4) il suffit de montrer que :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{On a : } z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + i$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \text{ par suite : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

### IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

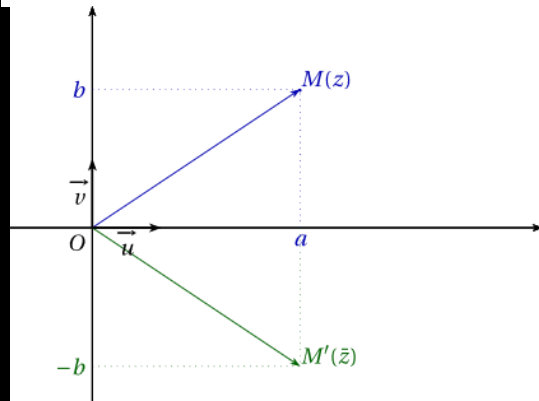
**Définition :** Soit le nombre complexe  $z = a + ib$

(a et b sont des réels) ; le nombre complexe

qu'on note  $\bar{z}$  et qui est égale à  $\bar{z} = a - ib$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si  $z$  est l'affixe de M,  $\bar{z}$  est l'affixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



**Exemple :** 1)  $z = 2 + 3i$  son conjugué est  $\bar{z} = 2 - 3i$

2)  $z = 3i + 6$  son conjugué est  $\bar{z} = -3i + 6$

3)  $z = 3 - \sqrt{6}$  son conjugué est  $\bar{z} = 3 - \sqrt{6}$

4)  $\overline{-7} = -7; \overline{2i} = -2i; \overline{-5 - 3i} = -5 + 3i; \overline{3 + 2i} = 3 - 2i$

**Propriété : (Règles de calculs)**  $z \in \mathbb{C}$  et  $z' \in \mathbb{C}$

1) si  $z = x + iy$  alors  $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

2)  $\bar{\bar{z}} = z$  3)  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$  4)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

5)  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$  6)  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

7)  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$  8)  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

9)  $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$  10)  $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$  si  $z \neq 0$

11)  $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$   $n \in \mathbb{Z}$

12)  $\bar{\lambda z} = \lambda \bar{z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R}$

### PREUVE :

• On prouve la 8)

On écrit les complexes z et z' sous forme

algébrique :  $z = a + bi$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}$

Et  $z' = a' + b'i$  avec  $a' \in \mathbb{R}$  et  $b' \in \mathbb{R}$

$$\text{On a alors : } \overline{z \times z'} = \overline{(a + bi)(a' + b'i)}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + ba')i}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

D'autre part :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = \overline{a+bi} \times \overline{a'+b'i} = (a-bi) \times (a'-ib')$$

$$\bar{z} \times \bar{z}' = aa' - iab' - a'bi - bb' = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

• On prouve la 9)

$$\text{On a : } z \times \frac{1}{z} = 1 \text{ donc : } \overline{z \times \frac{1}{z}} = \bar{1} \text{ donc } \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$$

$$\text{Donc : } \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}} \text{ cqfd}$$

• On prouve la 10)

$$\text{On a : } \frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z} \text{ donc } \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{z' \times \frac{1}{z}}$$

$$\text{donc } \overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \bar{z}' \times \frac{1}{\bar{z}} = \bar{z}' \times \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$$

• L'égalité 11) se démontre par récurrence si  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{En effet : } n=0 \text{ on a } \overline{(z^0)} = (\bar{z})^0 \text{ car } \bar{1} = 1$$

$$\text{Supposons que } \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$$

$$\text{Montrons que : } \overline{(z^{n+1})} = (\bar{z})^{n+1} ?$$

$$\overline{(z^{n+1})} = \overline{z^n \times z} = \bar{z}^n \times \bar{z} = (\bar{z})^n \times \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$$

$$\text{Donc : } \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si  $n$  est négatif alors  $m = -n \in \mathbb{N}$

Donc :

$$\overline{(z^n)} = \overline{(z^{-m})} = \overline{\left(\frac{1}{z^m}\right)} = \frac{1}{\bar{z}^m} = \frac{1}{(\bar{z})^m} = (\bar{z})^{-m} = (\bar{z})^n$$

$$\text{Donc : } \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Exemple1 :** Démontrer que  $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$  est un nombre réel.

**Solution :** On a :

$$\bar{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)}^5 + \overline{(1-i)}^5$$

$$\bar{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

$$\text{Exemple2 : on pose : } j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{et } S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \text{montrer que : } j^2 = \bar{j}$$

$$2) \text{Démontrer que : } S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Solution :1)**

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

$$2) \text{il suffit de montrer que : } S + \bar{S} = 0$$

$$S + \bar{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = (j^2)^n - j^n + \overline{(j^2)^n - j^n}$$

$$S + \bar{S} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n - j^n} = (\bar{j})^n - j^n + \overline{(\bar{j})^n} - \bar{j}^n$$

$$S + \bar{S} = \bar{j}^n - j^n + j^n - \bar{j}^n = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

**Exemple3 :** soit  $u \in \mathbb{C}$  tel que  $u \notin \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que : } (\forall z \in \mathbb{C}) \quad |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

**Solution :1)** soit  $z \in \mathbb{C}$  tel que :

$$|1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z|$$

$$\text{Donc : } |1+uz|^2 = |1+\bar{u} \cdot z|^2$$

$$\text{Donc : } (1+uz)\overline{(1+uz)} = (1+\bar{u} \cdot z)\overline{(1+\bar{u} \cdot z)}$$

$$\text{Donc : } (1+uz)(1+\bar{u}\bar{z}) = (1+\bar{u} \cdot z)(1+u \cdot \bar{z}) \text{ Car : } \bar{\bar{u}} = u$$

$$\text{Donc : } 1+uz + \bar{u}\bar{z} + u\bar{u}z\bar{z} = 1+u\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{u}z\bar{z}$$

$$\text{Donc : } uz + \bar{u}\bar{z} = u\bar{z} + \bar{u}z$$

$$\text{Donc : } (u - \bar{u})z + (\bar{u} - u)\bar{z} = 0$$

$$\text{Donc : } (u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$$

Et puisque :  $u - \bar{u} \neq 0$  car  $u \notin \mathbb{R}$



Donc :  $z - \bar{z} = 0$  Donc :  $z = \bar{z}$

Donc :  $z \in \mathbb{R}$

**Exercice 2:**  $z \in \mathbb{C}$

Ecrire en fonction de  $\bar{z}$  le conjugué des nombres complexes suivants :

$$1) Z_1 = (2+i)(5-i) \quad 2) Z_2 = 2z + 5i \quad 3) Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

**Solution :**

$$1) \bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$$

$$2) \bar{Z}_2 = \overline{2z + 5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$$

$$3) \bar{Z}_3 = \overline{\left( \frac{z-1}{-3z+i} \right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$$

**Exercice 3:** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad 2) z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

**Solution :1)**  $z \in \mathbb{C}$

donc :  $\exists x \in \mathbb{R}$  et  $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$$

$$(2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Donc : } x = \frac{14}{3} \text{ par suite: } z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$$

2)  $z \in \mathbb{C}$  donc :  $\exists x \in \mathbb{R}$  et  $\exists y \in \mathbb{R} / z = x + yi$

$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \Leftrightarrow x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$$

$$\text{Donc : } S = \{2 + 2i\}$$

**Exercice4 :** dans le plan complexe on considère le nombre complexe  $U$  et soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z$  et on pose :  $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$

Et  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réel et la partie imaginaire de  $U$

2) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel

3) Déterminer l'ensemble  $(C)$  des points  $M(z)$  tels que :  $U$  est imaginaire pur

**Solution :1)**  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$$

$$\text{Donc : } U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$$

$$\text{Donc : } U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$$

$$\text{Donc : } \text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y \text{ et } \text{Im}(U) = -y - 2x + 2$$

$$2) U \text{ est réel ssi } \text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$$

Donc : l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel est la droite d'équation :

$$(\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$$

$$3) U \text{ est imaginaire pur ssi } \text{Re}(U) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 1y + 1^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

l'ensemble  $(C)$  des points  $M(z)$  tels que :  $U$  est imaginaire pur est le cercle de centre :  $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\text{et de rayon : } R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**Exercice5 :**

A) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$1) 2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0 \quad 2) z + (1 - i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$$

$$3) (3+i)z + \bar{z} = -i$$

B) Déterminer les ensembles suivants :

$$1) (E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$$

$$2) (E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$$

**Exercice6 :** Démontrer que :

$$S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1} \text{ est un nombre réel } \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Solution :** On a :

$$(i-\sqrt{3})^{2n+1} = (- (\sqrt{3}-i))^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$$

$$\text{Donc: } (i-\sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3}-i)^{2n+1} \text{ car } (-1)^{2n+1} = -1$$

$$\text{Donc : } S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} + (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$$

$$\bar{S} = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1} = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1}$$

$$\bar{S} = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1} = (\sqrt{3}-i)^{2n+1} + (\sqrt{3}+i)^{2n+1}$$

$$\text{Donc : } \bar{S} = S$$

donc S est bien un nombre réel.

**Exercice7 :** dans le plan complexe on considère le nombre complexe  $U$  et soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z$  et on pose :  $U = 2iz - \bar{z}$

Et  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de  $x$  et  $y$  la partie réel et la partie imaginaire de  $U$

2) Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel

**Solution :** 1)  $z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } U = 2i(x + yi) - (x - yi) = 2ix - 2y - x + yi$$

$$\text{Donc : } U = (-2y - x) + i(y + 2x)$$

$$\text{Donc : } \operatorname{Re}(U) = -2y - x \text{ et } \operatorname{Im}(U) = y + 2x$$

$$2) U \text{ est réel ssi } \operatorname{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): y + 2x = 0$$

Donc : l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M(z)$  du plan tels que :  $U$  est réel est la droite d'équation :

$$(\Delta): y = -2x$$

## V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

### 1) Définition et applications

**Définition :** Soit  $z = x + yi$  un nombre complexe

avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

le réel positif  $\sqrt{x^2 + y^2}$  s'appelle le module du nombre complexe  $z$  et on le note  $|z|$

**Exemple :** calculer le module des nombres

$$\text{complexes suivants : } 1) z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2) z' = 3 - 4i$$

**Solution :**

$$|z| = \left| \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|z'| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; |-2i| = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

**Propriété :** Soit  $z = x + yi$  un nombre complexe ;

$$\text{on a } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

**Preuve :** en exercice

**Exercice :**

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

$$1) z_1 = 3 + \sqrt{3}i \quad 2) z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i \quad 3) z_2 = \frac{1}{1+i}$$

$$4) z_4 = x \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

$$1) u_1 = \frac{2+5i}{1+3i} \quad 2) u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}} \quad 3) u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$$

C) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$

tels que :  $A(z)$  ;  $B(\bar{z})$  et  $C(\frac{1}{z})$  soit alignés.



## 2) Règle de calculs

**Propriétés :** Pour tous complexes  $z$  et  $z'$  et pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$  on a :

$$1) |\bar{z}| = |-z| = |z| \quad 2) |z|^2 = z\bar{z} \quad 3)$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$4) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad 5) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$6) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \quad \text{si } z \neq 0$$

$$7) |z^n| = |z|^n \quad \text{si } z \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$8) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

**Exemple :** calculer le module des nombres complexes suivants : 1)  $z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$

$$2) z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \quad 3) z_3 = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3$$

**Solution :**

$$1) |z_1| = |-5(1+i\sqrt{3})| = |-5| |1+i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1+3} = 10$$

$$2) |z_2| = |(1+i)(\sqrt{3}-i)| = |1+i| \times |\sqrt{3}-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$3) |z_3| = \left| \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right|^3 = \left( \left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right| \right)^3 = \left( \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1-i|} \right)^3$$

$$|z_3| = \left( \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

## 2) interpretation geometrique du module :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé

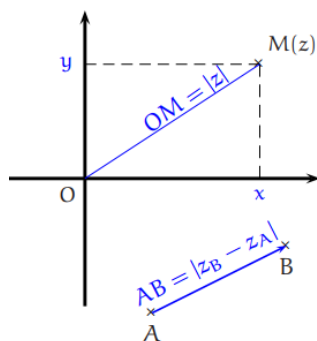
soit  $M$  l'image du nombre complexe  $z = x + iy$

avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  on

a :  $M(x, y)$  donc :

$$|\overline{OM}| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Donc :  $|z| = OM$



**Propriété :** Si  $A$  et  $B$  ont pour affixes  $z_A$  et  $z_B$ ,

$$\text{alors : } |\overline{AB}| = AB = |z_B - z_A|$$

**Preuve :** soit  $M$  tel que :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

On a donc :  $z_M = z_B - z_A$  avec  $z_M$  l'afixe de  $M$

$$\text{Donc : } |z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$$

**Exemple1 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  ; les points  $A$ ,  $B$  et  $C$

ont pour affixes:  $z_A = 2$  et  $z_B = 1 + \sqrt{3}i$  et  $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral

**Solution :** il suffit de montrer que :  $AC = AB = BC$

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + 3^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc :  $AC = AB = BC$

**Exemple2 :** Déterminer l'ensemble  $(\Delta)$  des points

M d'afixe  $z$  tels que :  $|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

**Solution :**

**Methode1 : Méthode géométrique :**

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| = |z - (7 - 2i)|$$

On pose :  $A(z_A = 1 + 2i)$  et  $B(z_B = 7 - 2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble  $(\Delta)$  cherché est la médiatrice du

segment  $[AB]$

**Methode1 : Méthode algébrique :**

$z \in \mathbb{C}$  donc  $\exists x \in \mathbb{R}$  et  $\exists y \in \mathbb{R}$  tel que :  $z = x + yi$

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 - 2i| = |x + yi - 7 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow |x - 1 + i(y - 2)| = |x - 7 + i(y + 2)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 12x - 8y - 48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta): 3x - 2y - 12 = 0$$

**Exercice 8:** Déterminer l'ensemble des points M d'affixe  $z$  tels que a)  $|z - 3 + i| = 5$

$$b) |z - 4 - 5i| = |z + 2|$$

**Solution :**

a) Soit A le point d'affixe  $3 - i$

$$|z - 3 + i| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5.

b) Soient B et C les points d'affixes  $4 + 5i$  et  $-2$

$$|z - 4 - 5i| = |z + 2| \Leftrightarrow BM = CM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment  $[BC]$

**Exercice 9 :** Déterminer l'ensemble (C) des points

M d'affixe  $z$  tels que :  $|z - 2i| = 3$

**Solution :**

**Methode 1 : Méthode géométrique :**

$$|z - 2i| = 3 \text{ On pose : } A(z_A = 2i)$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0; 2)$  et de rayon :  $R = 3$

**Methode 1 : Méthode algébrique :**

$z \in \mathbb{C}$  donc  $\exists x \in \mathbb{R}$  et  $\exists y \in \mathbb{R}$  tel que :  $z = x + yi$

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + yi - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + i(y - 2)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0; 2)$  et de rayon :  $R = 3$

**Exercice 10 :** Déterminer l'ensemble ( $\Delta$ ) des

points M d'affixe  $z$  tels que :  $|iz + 3| = \left| \frac{1}{i}z - 4i + 1 \right|$

**Solution :**

**Methode 1 : Méthode géométrique :**

$$|iz + 3| = \left| \frac{1}{i}z - 4i + 1 \right| \Leftrightarrow |i(z - 3i)| = \left| \frac{1}{i}(z + 4 + i) \right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z + 4 + i| \text{ car } |i| = \left| \frac{1}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z - (-4 - i)|$$

On pose :  $A(z_A = 3i)$  et  $B(z_B = -4 - i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble ( $\Delta$ ) cherché est la médiatrice du

segment  $[AB]$

## VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

### 1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

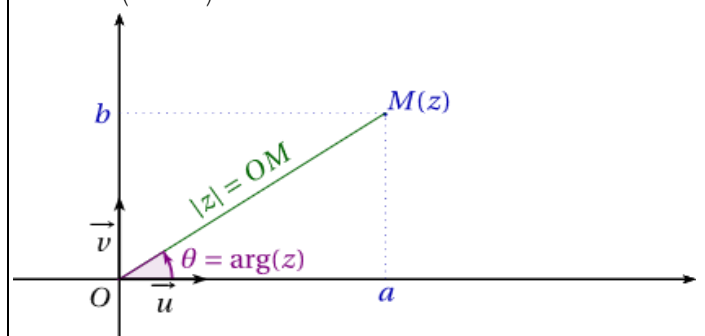
**Définition :** Le plan complexe est muni d'un

repère  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soit  $z$  un nombre complexe non

nul et  $M(z)$  son image. On appelle argument du

nombre complexe  $z$  une mesure (en radian) de

l'angle  $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$  On le note par  $\arg(z)$



**Exemple :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ;

on considère les points A ; B ; C ; D ; E ; F qui ont pour affixes:  $z_A = 2$  et  $z_B = -2i$  et  $z_C = 2 + 2i$  et

$$z_D = 3i \text{ et } z_E = -3 \text{ et } z_F = -2 + 2i$$

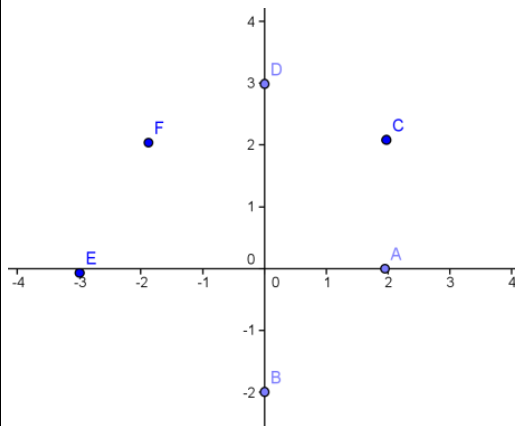
1) Représenter les points A ; B ; C ; D ; E ; F dans le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer

l'argument des complexe :  $z_A$  et  $z_B$  et  $z_C$  et

$$z_D \text{ et } z_E \text{ et } z_F$$

**Solution :1)**



$$2) \arg z_A = 0[2\pi] \text{ et } \arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi] \text{ et } \arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg z_E = \pi[2\pi] \text{ et } \arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

**Remarque :** le complexe nul n'a pas d'argument

**Propriété :**  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $y \in \mathbb{R}^*$

$$1) z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi] \quad 2) z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$$

$$3) \arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } y > 0 \text{ et } \arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ si } y < 0$$

$$4) \arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi] \quad 5) \arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$$

$$\text{Exemple : } \arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \text{ et } \arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$$\arg(2) \equiv 0[2\pi] \text{ et } \arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$$

**2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul**

Soit  $z = a + ib$  un complexe non nul, on a donc

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0 \text{ et par suite :}$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$\text{Or : si } \arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

$$\text{alors : } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Et finalement : } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

**Propriété :** Tout nombre complexe non nul  $z$  à une écriture de la forme  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\text{Où } \arg(z) \equiv \theta [2\pi]$$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul  $z$

**Exercice 11 :**

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants :

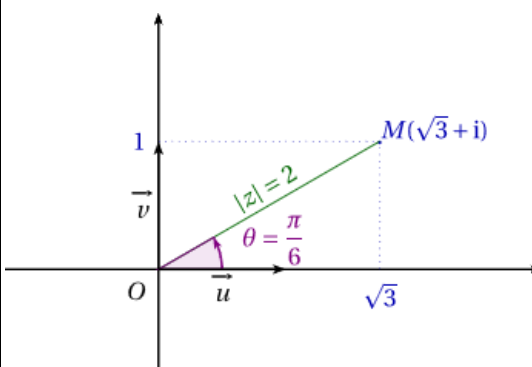
$$1) z_1 = \sqrt{3} + i \quad 2) z_2 = 1 - i \quad 3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i \quad 5) z = 7 \quad 6) z = -12$$

$$\text{Solution :1) } |z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_1 = \sqrt{3} + i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg z_1 \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



$$2) |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a :  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$  donc :

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$3) \quad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( -\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et on a :  $\sin(\pi - x) = \sin x$  et  $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc :

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$4) \quad z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( -\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$  et  $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2 \left( \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left( \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

**Propriété :**  $z \in \mathbb{C}^*$

Si on a  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  avec  $r > 0$

Alors  $|z| = r$  et  $\arg z \equiv \theta [2\pi]$

**Exemple :** Donner la forme trigonométrique du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants avec

$$\theta \in ]-\pi; \pi[ - \{0\}$$

$$1) \quad z_1 = \sin \theta + i \cos \theta \quad 2) \quad z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$3) \quad z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

**Solution :** 1)

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta = 1 \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre

complexe  $z_1$  donc  $|z_1| = 1$  et  $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$

$$2) \quad z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

• Si  $\theta \in ]0; \pi[$  alors :  $\frac{\theta}{2} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  donc  $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe  $z_2$  est :

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg z \equiv \frac{\theta - \pi}{2} [2\pi]$$

• Si  $\theta \in ]-\pi; 0[$  alors :  $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$  donc  $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( -\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe  $z_2$  et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \quad \text{et} \quad \arg z \equiv \frac{\theta + \pi}{2} [2\pi]$$

$$3) \quad z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

• Si  $\theta \in ]0; \pi[$  alors :  $\frac{\theta}{2} \in ]0; \frac{\pi}{2}[$  donc  $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe  $z_3$  est :  $z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

• Si  $\theta \in ]-\pi; 0[$  alors :  $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}; 0[$  donc  $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( -\cos \left( \frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \left( \pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe  $z_2$  et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

### 3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls tels que  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$  et  $\arg(z') \equiv \theta' [2\pi]$

On donc :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |z||z'|(\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') \end{aligned}$$

$$= |z||z'|(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta')) = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

(En utilisant les formules de transformations)

**Propriété principale :** Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes non nuls :

$$1) \arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$2) \arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$3) \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$4) \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$$

$$5) \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

### Preuves (en exercice)

**Notations :** Soit  $z$  un nombre complexe dont la forme trigonométrique est :  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  c'est-à-dire  $|z| = r$  et  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

On écrit :  $z = [r, \theta]$

### Règles de calculs :

$$1) [r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

$$2) 1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$$

$$3) [r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$$

$$4) -[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$$

$$5) \overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$$

$$6) [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

**Exemple :** on considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = 1 - i \text{ et } Z = \frac{z_1}{z_2} \text{ et } U = z_1^6 \times z_2^2$$

1) Ecrivez les nombres complexes  $z_1$  ;  $z_2$  et  $Z$  et

Sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe  $Z$  Sous sa forme algébrique

puis en déduire  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

**Solution :** 1)  $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

On a :  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{Donc : } z_1 = 2 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left[ 2; -\frac{\pi}{6} \right]$$

$$\text{On a : } |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[ 2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[ \sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$U = \left[ 2^6; -\pi \right] \times \left[ 2; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[ 2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$U = 2^7 \left( \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right) = 2^7 (0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i-i+1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

**Exercice 12 :** Ecrire le complexe  $Z = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

**Solution :** On va d'abord écrire  $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } Z = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8 = \left[ \sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^8$$

$$Z = \left[ \sqrt{2}^8; \frac{8\pi}{3} \right] = 16 \left( \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left( \cos \frac{6\pi+2\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi+2\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left( \cos \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

$$Z = 16 \left( \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 16 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z = -8 + 8\sqrt{3}i$$

**Exercice 13 :** Déterminer le module et l'argument du nombre complexe  $z$  dans les cas suivants :

$$1) z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 2) z = -5 - 5i \quad 3) z = -6 + 6\sqrt{3}i$$

$$4) z = (3 - 3i)^4 \quad 5) z = -2 - 2\sqrt{3}i \quad 6) z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$$

$$7) z = (\sqrt{3} + 3i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad 8) z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

$$9) z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

**4) Les formes trigonométriques des racines carrées .**

**Définition :** On appelle racine carrée d'un

complexe  $z$  tout complexe  $u$  tel que  $u^2 = z$

**Remarque :** Un complexe non nul admet deux racines carrées.

**Preuve :** d'une propriété :

Soit  $z = [r, \theta]$  un complexe non nul et  $u = [\rho, \alpha]$

une racine de  $z$  donc  $u^2 = z$  ce que se traduit

$$\text{par : } \begin{cases} \rho^2 \equiv r \\ 2\alpha \equiv \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \equiv \sqrt{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta + 2k\pi}{2} \end{cases} \text{ avec } k \in \{0; 1\}$$

**Propriété :** Soit  $z = [r, \theta]$  un complexe non nul ; les racines carrées de  $[r, \theta]$  sont les complexes :



$$u_1 = \left[ \sqrt{r}; \frac{\theta}{2} \right] \text{ et } u_2 = \left[ \sqrt{r}; \frac{\theta}{2} + \pi \right] = -u_1$$

**Exemple :** Déterminer les racines carrées de

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ? \text{ On a : } |z| = 1 \text{ et } \arg z \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

Donc les racines carrées de  $z$  sont :

$$u_1 = \left[ 1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } u_2 = -u_1$$

**Exercice14 :** Soit le complexe :

$$u = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$$

1) Calculer  $u^2$  puis déterminer la forme trigonométrique de  $u^2$

2) En déduire la forme trigonométrique de  $u$

## VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

### 1) Angles orientés et argument.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ ;

On sait que si le nombre complexe  $z$  est non nul alors :  $(\vec{e}_1; \overrightarrow{OM}) \equiv \arg z [2\pi]$

□ Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non nuls d'images respectives  $M$  et  $M'$ , on a

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{OM}; \vec{e}_1) + (\vec{e}_1; \overrightarrow{OM'}) [2\pi]$$

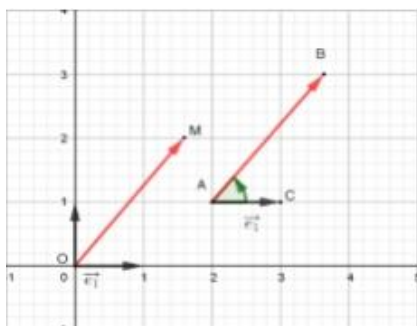
$$\equiv -(\vec{e}_1; \overrightarrow{OM}) + (\vec{e}_1; \overrightarrow{OM'}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg z' - \arg z [2\pi] \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$$

Soient  $A$  et  $B$  deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs  $a$  et  $b$ , on sait qu'il existe un

unique point  $M$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$  et  $M$  aura

Pour affixe le complexe  $(b - a)$



Prof/ATMANI NAJIB

$$\text{Donc : } (\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(b - a) [2\pi]$$

Soient  $A, B$  et  $C$  trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs  $a, b$  et  $c$ , on a :

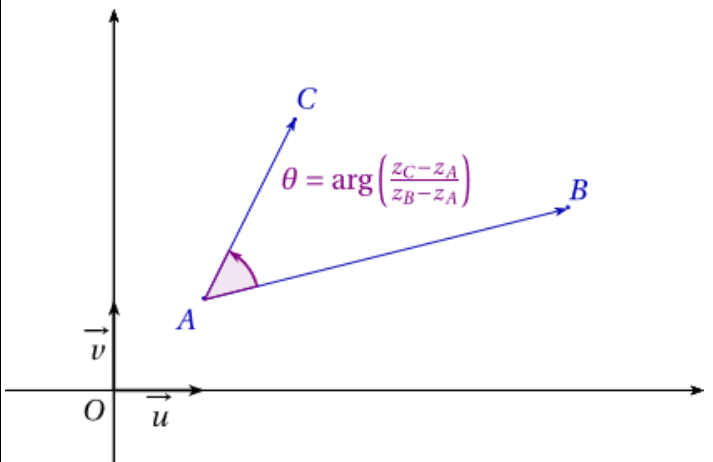
$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \vec{e}_1) + (\vec{e}_1; \overrightarrow{AC}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv -(\vec{e}_1; \overrightarrow{AB}) + (\vec{e}_1; \overrightarrow{AC}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv -\arg(b - a) + \arg(c - a) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg(c - a) - \arg(b - a) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left( \frac{c - a}{b - a} \right) [2\pi]$$



Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs  $a, b, c$  et  $d$

$$\text{on a : } (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CD}) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD}) + \pi [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left( \frac{c - a}{b - a} \right) + \arg \left( \frac{d - c}{a - c} \right) + \arg(-1) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left( \frac{c - a}{b - a} \right) \left( \frac{d - c}{a - c} \right) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left( \frac{d - c}{b - a} \right) [2\pi]$$

**Propriété :** 1) Soient  $M$  et  $M'$  et  $A, B, C$  et  $D$  quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs  $z, z', a, b, c$  et  $d$  on a :

$$1) (\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}) \equiv \arg \left( \frac{z'}{z} \right) [2\pi]$$

$$2) \left( \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{AB} \right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$$

$$3) \left( \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

$$4) \left( \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD} \right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

**Exemple :** Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs  $z_A = 3 + 5i$ ,  $z_B = 3 - 5i$  et  $z_C = 7 + 3i$

$$1) \text{montrer que : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que :  $BC = 2AC$

**Solution :1)**  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i$

$$\left( \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB} \right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)[2\pi]$$

$$\left( \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB} \right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$$

$$\left( \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB} \right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

On a :  $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$  donc :  $\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i|$

Donc :  $\frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2$  donc :  $\frac{BC}{AC} = 2$

Donc :  $BC = 2AC$

**Exemple15 :** Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs  $a = 2i$ ,  $b = \sqrt{2}(1+i)$  et

$$c = a + b$$

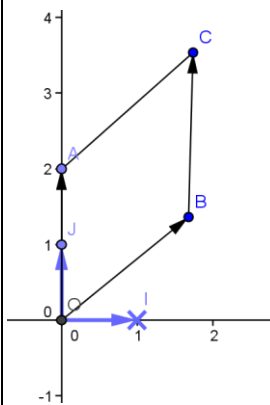
1)Montrer que OBCA est un losange

2) Montrer que :  $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

**Solution :**

1)On a :  $c = a + b$  donc :  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Donc OBCA est un parallélogramme



on a :  $|a - 0| = |2i| = 2 = OA$

$OB = |b - 0| = |\sqrt{2}(1+i)| = |\sqrt{2}|(1+i)| = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$

alors :  $OB = OA$

donc OBCA est un losange

2)  $\arg c \equiv \left( \vec{i}; \overrightarrow{OC} \right) [2\pi]$

$$\equiv \left( \vec{i}; \overrightarrow{OB} \right) + \left( \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \left( \vec{i}; \overrightarrow{OB} \right) + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA} \right) [2\pi] \quad (\text{OBCA : losange})$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} \arg \frac{a}{b} [2\pi]$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} (\arg a - \arg b) [2\pi]$$

Donc :  $\arg c \equiv \frac{1}{2} (\arg a + \arg b) [2\pi]$

Or :  $a = 2i$  donc :  $\arg a \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Et :  $b = \sqrt{2}(1+i) = 2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$b = 2 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  donc  $\arg b \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Donc :  $\arg c \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) [2\pi]$

Donc :  $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

**Exercice16** : Soient  $A, B$  et  $C$  des points dans le plan complexe d'affixes respectifs  $a = 2 + i$ ,

$b = 3 + 2i$  et  $c = 5 - i$

Soit  $\alpha$  une mesure de l'angle orienté :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer  $\tan \alpha$

**Solution** : On a :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

Donc :  $\alpha = \arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

Donc :  $\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{26}}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$

Donc :  $\sqrt{26} \cos \alpha = 1$  et  $\sqrt{26} \sin \alpha = -5$

Donc :  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$  et  $\sin \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$

Donc :  $\tan \alpha = -5$

**Exercice17** : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$  les

points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs :  $z_1 = -\sqrt{2}$  et

$z_2 = 1 + i$  et  $z_3 = 1 - i$

1) Placer dans le repère  $\mathcal{R}$  les points  $A, B$  et  $C$

2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe  $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$  et déterminer une mesure de

l'angle  $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite  $(OA)$  est la médiatrice du segment  $[BC]$  et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre  $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$  sous sa forme

algébrique puis en déduire  $\cos \left( \frac{\pi}{8} \right)$  et  $\sin \left( \frac{\pi}{8} \right)$

## 2) Applications

### 2.1 Alignement de 3 points.

**Corolaire** : Trois points  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$  sont

alignés si et seulement si :  $\arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \equiv 0 [2\pi]$

**Preuve** : On sait que :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

Et  $\frac{c-a}{b-a} = r (\cos \theta + i \sin \theta)$  où  $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = r$  et

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \theta [2\pi]$$

$A(a), B(b)$  et  $C(c)$  sont alignés si et seulement si

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv k\pi [2\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r \text{ ou } \frac{c-a}{b-a} = -r$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

**Exercice18** : 1° Vérifier que les points  $A(5+3i)$  ;  $B(2+i)$  et  $C(-1-i)$  sont alignés

2° Est ce que les points  $M(-2+2i), N(2-i)$  et  $N(1-i)$  sont alignés ?

### 2.2 droites parallèles

**Corolaire** :  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$  et  $D(d)$

$(AB) \parallel (CD)$  si et seulement si :  $\arg \left( \frac{a-b}{c-d} \right) \equiv 0 [2\pi]$

Ou  $\arg \left( \frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \pi [2\pi]$

### 2.3 droites perpendiculaires

**Corolaire** :  $A(a), B(b)$  et  $C(c)$  et  $D(d)$

$(AB) \perp (CD)$  si et seulement si :

$$\arg \left( \frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ ou } \arg \left( \frac{a-b}{c-d} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

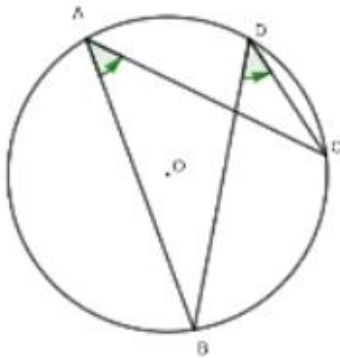
## 2.4 Cocyclicité de 4 points.

**Rappelle :** Soit  $(C)$  le cercle qui circonscrit le triangle  $ABC$ , le point  $D$  appartient au cercle  $(C)$  si et seulement si :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) [2\pi] \text{ ou } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi - (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) [2\pi]$$

**1<sup>ier</sup> CAS :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}) [2\pi]$$



Ceci se traduit par :

$$\arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \equiv \arg \left( \frac{c-d}{b-d} \right) [2\pi]$$

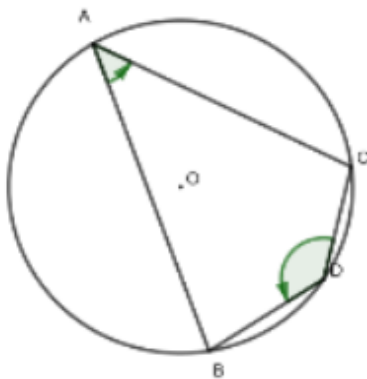
$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) - \arg \left( \frac{c-d}{b-d} \right) \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left[ \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \times \left( \frac{b-d}{c-d} \right) \right] \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \times \left( \frac{b-d}{c-d} \right) \in \mathbb{R}^{*+}$$

**2<sup>ier</sup> CAS :**

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \pi - (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) [2\pi]$$



Ceci se traduit par :

$$\arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \equiv \pi - \arg \left( \frac{b-d}{c-d} \right) [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left( \frac{c-a}{b-a} \right) + \arg \left( \frac{b-d}{c-d} \right) - \pi \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg \left[ \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \times \left( \frac{b-d}{c-d} \right) \times (-1) \right] \equiv 0 [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{c-a}{b-a} \right) \times \left( \frac{b-d}{c-d} \right) \in \mathbb{R}^{*-}$$

**Théorème :** Soit  $A(a), B(b), C(c)$  et  $D(d)$  quatre points dans le plan complexe.

Les points  $A, B, C$  et  $D$  sont cocycliques si et

seulement si :  $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

**Exercice19 :** Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tel que :

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

**Solution :** Pour répondre à cette question, on peut écrire  $Z$  sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que  $z \neq 1$ . On note  $A(1)$

$z \in \mathbb{C}$  donc  $\exists x \in \mathbb{R}$  et  $\exists y \in \mathbb{R}$  tel que :  $z = x + yi$

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5x-2+5iy}{x-1+iy} = \frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-5x-2x+2+5y^2)+i(-5xy+2y+5xy-5y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-7x+2+5y^2)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$$

$Z$  est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-7x+2=0 \\ x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5}=0$$

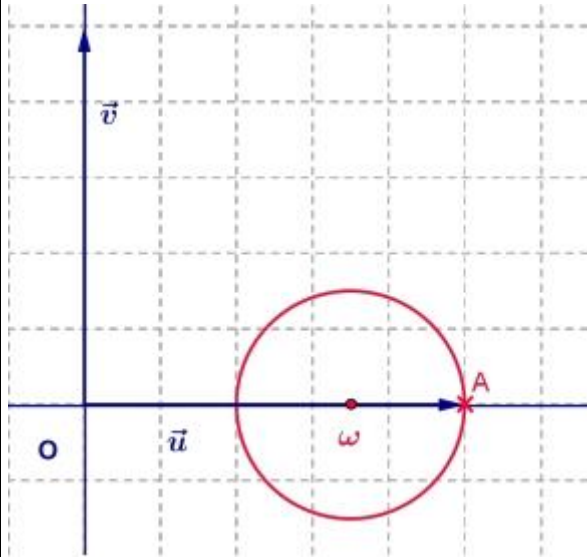
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2=\frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$\omega(\frac{7}{10} + 0i)$  et de rayon  $\frac{3}{10}$ .

Le point A(1) appartient à (C).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



### Exercices20 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

que :  $\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1$

### Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$z = x + yi$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$

On doit avoir :  $z \neq -1 + i$

$z - 2 = x - 2 + yi$

$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$

$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1$

$\Leftrightarrow |z-2| = |z+1-i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$

$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$y = 3x - 1$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

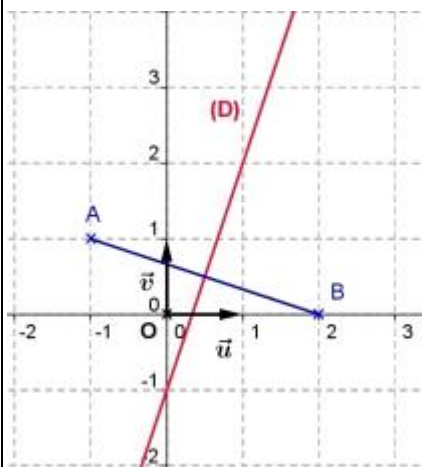
On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$\overrightarrow{AM}(z+1-i)$  donc  $|z+1-i| = AM$

$\overrightarrow{BM}(z-2)$  donc  $|z-2| = BM$

$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-2|}{|z+1-i|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice21 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que :  $|a| = |b| = |c| = 1$  et  $a \neq c$  et

$b \neq c$

1) Montrer que :  $\left( \frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) en déduire que :  $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[ \frac{\pi}{2} \right]$

Solution :  $\overline{\left( \frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left( \frac{\bar{c}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} \right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$

On a si :  $|z| = 1$  alors :  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  donc :

$\overline{\left( \frac{c-b}{c-a} \right)^2} \times \frac{a}{b} = \left( \frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} = \left( \frac{b-c}{a-c} \right)^2 \times \frac{b}{a}$

$$\overline{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2} \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc :  $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2) puisque :  $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$  alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc :  $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc :  $2 \arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2} \arg\left(\frac{b}{a}\right) \left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et  
exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage