

Cours et exercices d'applications et de réflexions sur les nombres complexes (Partie 1)

PROF : ATMANI NAJIB

2ème BAC Sciences maths

NOMBRES COMPLEXES

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Définition d'un nombre complexe.

1.1 L'ensemble \mathbb{C} ; définition et vocabulaire: On admet qu'il existe un ensemble noté \mathbb{C} ses éléments s'appellent des nombres complexes qui vérifie :

1) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2) On définit dans l'ensemble \mathbb{C} deux opérations appelées la somme et la multiplication qui ont les mêmes propriétés que dans \mathbb{R} , l'ensemble des nombres réels.

3) L'ensemble \mathbb{C} contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $i^2 = -1$

4) Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $z = a + ib$ où a et b sont des réels

5) Le réel a s'appelle la partie réel du nombre complexe z ; on écrit : $a = \operatorname{Re}(z)$

6) Le réel a s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $b = \operatorname{Im}(z)$

7) L'écriture : $z = a + ib$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe z .

Exemples

- Les nombres -1 ; 0 ; $3/4$; $\sqrt{2}$ sont des nombres réels donc ce sont aussi des éléments de \mathbb{C} .
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-i$; $2i$; $i\sqrt{2}$... sont aussi dans \mathbb{C} .

- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans \mathbb{C} : $-1+i$; $\sqrt{2}+2i$

THÉORÈME : Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique.

PREUVE :

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux complexes tels que $z = z'$

$$z = z' \Leftrightarrow x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x - x' = i(y' - y)$$

Raisonnons par l'absurde : si $y' - y \neq 0$ alors

$$i = \frac{x - x'}{y' - y} \text{ étant un réel, on aboutit à une}$$

contradiction. Donc : $y' = y$ et on déduit alors

$$x - x' = 0 \text{ donc : } x = x'$$

La réciproque est claire.

Remarque : $z = x + iy$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$1) x + iy = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad 2) z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases}$$

1.3 Remarque :

1) L'ensemble \mathbb{R} est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

1.4 Des sous-ensembles de \mathbb{C}

1) L'ensemble \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels est une partie de \mathbb{C} ; $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$$

2) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de \mathbb{C} , s'appelle L'ensemble des imaginaires purs ; $i\mathbb{R} = \{iy / y \in \mathbb{R}\}$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

3) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

(\subsetneq veut dire strictement inclus strictement :

$$2 + 3i \notin \mathbb{R} \text{ et } 2 + 3i \notin i\mathbb{R}$$

II) LES OPERATIONS DANS \mathbb{C} .

1) L'addition dans \mathbb{C} .

1.1 Définition

Définition : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

On en déduit que : $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$ et

$$\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$$

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble \mathbb{C} est :

1) Associative : $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) ((z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3))$

2) Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) (z + z' = z' + z)$

3) 0 est l'élément neutre pour l'addition dans \mathbb{C} :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) (0 + z = z + 0 = z)$$

4) Chaque élément z dans \mathbb{C} a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$

On dit que \mathbb{C} muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que :

$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire :

$z + (-z')$ qu'on la note : $z - z'$

$$z - z' = (a - a') + i(b - b')$$

2) La multiplication dans \mathbb{C} .

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans \mathbb{C} prolonge celle dans \mathbb{R} on peut définir la multiplication dans \mathbb{C}

par : Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.

Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$$z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = aa' + ab'i + iba' + bb'i^2$$

$$i^2 = -1$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$$

2.2 Propriétés :

La multiplication dans l'ensemble \mathbb{C} est :

1) Associative : $(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) ((z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3))$

2) Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2) (z \times z' = z' \times z)$

3) 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans \mathbb{C} : $(\forall z \in \mathbb{C}) (1 \times z = z \times 1 = z)$

4) Chaque élément non nul z dans \mathbb{C} a un symétrique appelé l'inverse de z noté : $(\frac{1}{z} \text{ ou } z^{-1})$

$$\text{Et on a } z \times \frac{1}{z} = 1$$

On dit que \mathbb{C}^* muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : (\mathbb{C}^*, \times)

En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble \mathbb{C} il y a une propriété commune entre les deux opérations :

5) La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans \mathbb{C} :

$$(\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3) (z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3)$$

Définition : Puisque $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et (\mathbb{C}^*, \times) est un groupe commutatif et la multiplication est distributive par rapport à l'addition dans \mathbb{C} ; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.3 Le quotient de deux complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note

$$\frac{z}{z'} \text{ ou } z(z'^{-1})$$

2.3 Règles de calculs dans \mathbb{C}

$(\mathbb{C}, +, \times)$ étant un corps commutatif ; toutes les règles de calculs qu'on a connu dans \mathbb{R} sont vraies dans \mathbb{C} .

$$1) zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

$$2) z^0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}^*) (z^n = z \times z \times \dots \times z) \text{ } n \text{ fois}$$

$$3) z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

$$4) z^{n+m} = z^n \times z^m$$

$$5) z^{n-m} = z^n / z^m$$

$$6) (z^n)^m = z^{n \times m}$$

$$7) z^n - z_1^n = (z - z_1) (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1})$$

$$8) \text{ Si } z \neq 1 \text{ alors : } S = 1 + z^1 + z^2 + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

somme des termes d'une suite géométrique

$$9) (z + z_1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z_1^{n-k} \text{ formule de binôme}$$

Application : Trouver la forme algébrique et déterminer la parties réelles et imaginaires des nombres complexes suivants :

$$z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2 \quad z_2 = (1+i\sqrt{3})^3$$

$$z_3 = \frac{1-3i}{3-i} \quad z_4 = \frac{1+i}{3-2i} \quad z_5 = (1+i)^{10}$$

Solution : 1)

$$z_1 = -6 + 5i = a + bi \text{ donc } \operatorname{Re}(z_1) = -6 \text{ et } \operatorname{Im}(z_1) = 5$$

$$2) z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 \times (\sqrt{3}i) + 3 \times 1 \times (\sqrt{3}i)^2 + (\sqrt{3}i)^3$$

$$z_2 = 1 + 3\sqrt{3}i - 3 \times 3 - 3\sqrt{3}i = -8 + 0i \in \mathbb{R}$$

$$\text{car } \operatorname{Im}(z_2) = 0$$

$$3) z_3 = \frac{1-3i}{3-i} = \frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3+i-9i+3}{9-i^2} = \frac{6-8i}{10}$$

$$z_3 = \frac{6}{10} - \frac{8i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} \text{ donc } \operatorname{Re}(z_3) = \frac{3}{5} \text{ et } \operatorname{Im}(z_3) = -\frac{4}{5}$$

$$4) z_4 = \frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{3+2i+3i-2}{9-4i^2} = \frac{1+5i}{13} = \frac{1}{13} + i \frac{5}{13}$$

$$5) z_5 = (1+i)^{10} = ((1+i)^2)^5 = (1^2 + 2i \times 1 + i^2)^5 = (2i)^5$$

$$z_5 = (2i)^5 = 2^5 \times i^5 = 32 \times (i^2)^2 \times i = 32i$$

est un imaginaire pur car $\operatorname{Re}(z_5) = 0$

REMARQUES :

Lorsque $\operatorname{Im}(z) = 0$, $z = a$ est réel.

Lorsque $\operatorname{Re}(z) = 0$, $z = ib$ est appelé imaginaire pur.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe

Le plan (P) est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{u}, \vec{v})$; et soit \mathcal{V}_2 le plan vectoriel associé à (P) . Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan (P) .

L'application : $\mathbb{C} \rightarrow (P)$

$$z \mapsto M(a, b)$$

où $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$ est une bijection

1) Le point M s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (P) , et l'application

2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point M on écrit : $z = \operatorname{aff}(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$

3) L'application : $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{V}_2$

$$z \mapsto \vec{u} (a; b)$$

où $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$ est une bijection

4) Le vecteur \vec{u} s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan (P)

5) Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur \vec{u} on

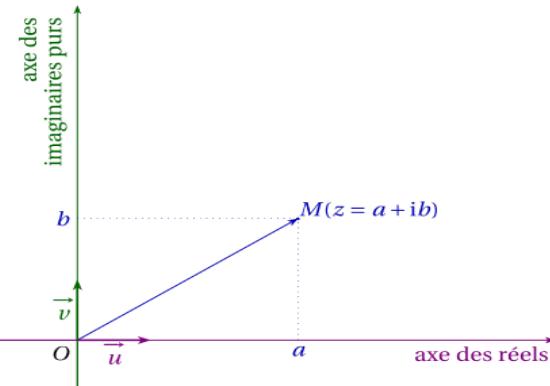
écrit : $z = \operatorname{aff}(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$

6) Le plan (P) s'appelle un plan complexe

7) a) L'axe $(O; \vec{u})$ s'appelle l'axe des réels

b) L'axe $(O; \vec{v})$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout ce qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O; \vec{u}, \vec{v})$



REMARQUES :

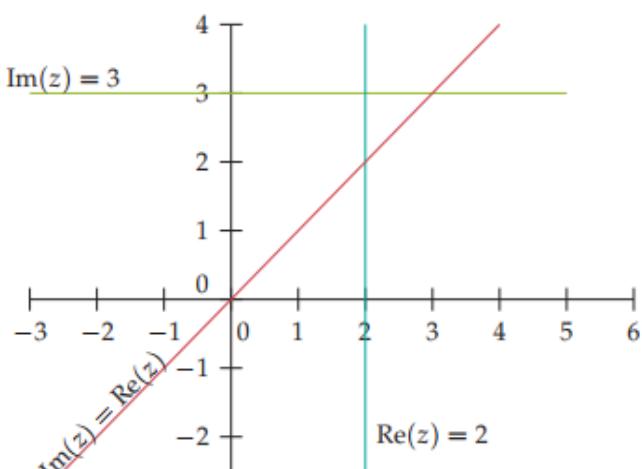
1) Les complexes $z = a \in \mathbb{R}$ sont des nombres réels et sont représentés sur l'axe des Réels.

2) Les complexes $z = ib$, $b \in \mathbb{R}$ sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.

3) Le plan est alors appelé plan complexe.

Exemple 1 : Dans le plan complexe, on a représenté ci-contre les points d'affixe z tels que

- $\operatorname{Re}(z) = 2$
- $\operatorname{Im}(z) = 3$
- $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z)$.



2) Les opérations sur les affixes.

Propriété : Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs dans \mathcal{V}_2 ; M et N deux points dans le plan (P) et α un réel ; On a :

- 1) $\operatorname{aff}(A) = \operatorname{aff}(B) \Leftrightarrow A = B$
et $\operatorname{aff}(\vec{u}) = \operatorname{aff}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- 2) $\operatorname{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \operatorname{aff}(\vec{u}) + \operatorname{aff}(\vec{v})$
- 3) $\operatorname{aff}(\alpha \vec{u}) = \alpha \times \operatorname{aff}(\vec{u})$
- 4) $\operatorname{aff}(\vec{AB}) = \operatorname{aff}(B) - \operatorname{aff}(A) = z_B - z_A$

Propriété :

- 1) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

2) Si $G = Bar\{(A_k, \alpha_k) | 1 \leq k \leq n\}$ et $z_k = aff(A_k)$

$$\text{alors : } z_G = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{k=n} \alpha_k}$$

3) Cas particuliers 2 points pondérés :

$$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \text{ on a } z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$$

4) Cas particuliers 3 points pondérés :

$$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \text{ on a :}$$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes

respectifs : z_A, z_B et z_C

On sait que :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha \overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A))$$

$$\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{R}) \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha \right) \Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Propriété : Soient A, B et C trois points distincts du

plan d'affixes respectifs z_A, z_B et z_C

les points A, B et C sont alignés si et seulement si :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$$

Exemple1 : soient dans le plan complexe les

$$\text{points : } A(1+i) \text{ et } B\left(\frac{1}{2} + 2i\right) \text{ et } C(-1-i)$$

Montrer que les les points A, B et C sont alignés.

Solutions :

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{\frac{1}{2} + 2i - i}{-1 - i - i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-1 - 2i} = \frac{\frac{1}{2} + i}{-2\left(\frac{1}{2} + i\right)} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Donc : les les points A, B et C sont alignés

Exemple2 : soient dans le plan complexe les

points : $A(2; -3)$ et $B(1; 1)$ et $C(1; 2)$

1) Déterminer les affixes des points A et B et C ?

2) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

3) Déterminer l'affixe de I , milieu de $[AB]$.

4) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

6) Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solutions : 1) l'affixe du point A est $z_A = 2 - 3i$

l'affixe du point B est $z_B = 1 + i$

l'affixe du point C est $z_c = 1 + 2i$

$$2) aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$$

$$z_{AB} = (1+i) - (2-3i) = -1+4i$$

$$3) z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2-3i+1+i}{2} = \frac{3-2i}{2} = \frac{3}{2} - i$$

$$4) \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(1+2i) - (2-3i)}{(1+i) - (2-3i)} = \frac{-1+5i}{-1+4i}$$

$$= \frac{(-1+5i)(-1-4i)}{(-1-4i)(-1+4i)} = \frac{1+4i-5i+20}{(-1)^2 - (4i)^2}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{21-i}{17} = \frac{21}{17} - \frac{1}{17}i \notin \mathbb{R}$$

Donc : les points A, B et C ne sont pas alignés.

5) le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$?

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = \frac{2z_A - 1z_B + 3z_C}{2-1+3}$$

$$z_G = \frac{2(2-3i) - 1(1+i) + 3(1+2i)}{2-1+3} = \frac{6-i}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$$

6) $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c'est-à-dire : $z_B - z_A = z_C - z_D$

$$z_D = z_C + z_A - z_B$$

On en déduit en remplaçant par les données :

$$z_D = 1 + 2i + 2 - 3i - 1 - i = 2 - 2i$$

Exercice 1 :

soient dans le plan complexe les points :

A ; B ; C ; D ; E d'affixes respectivement :

$$z_A = 1 + i \text{ et } z_B = 3 + 2i \text{ et } z_C = 2 - i \text{ et } z_D = -2i \text{ et}$$

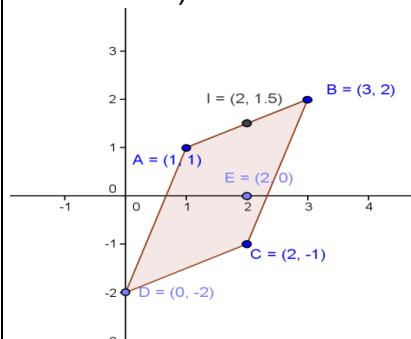
$$z_E = 2$$

- 1) Représenter ces points dans le plan complexe
- 2) Déterminer l'affixe de I milieu de [AB].

3) Déterminer l'affixe du vecteur \overrightarrow{AB}

4) montrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

Solution : 1)



I milieu de [AB]. Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc $z_I - z_A = z_B - z_I$

$$\text{Donc : } z_I = \frac{z_B + z_A}{2} \text{ donc : } z_I = \frac{3+2i+1+i}{2} = 2 + \frac{3}{2}i$$

$$\text{Donc : } I\left(2, \frac{3}{2}\right)$$

$$3) z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 2i - (1 + i) = 3 + 2i - 1 - i = 2 + i$$

4) il suffit de montrer que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\text{On a : } z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + i$$

$$z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 2 - i - (-2i) = 2 + i$$

$$\text{Donc : } z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}} \text{ par suite : } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Donc : le quadrilatère ABCD est un parallélogramme

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

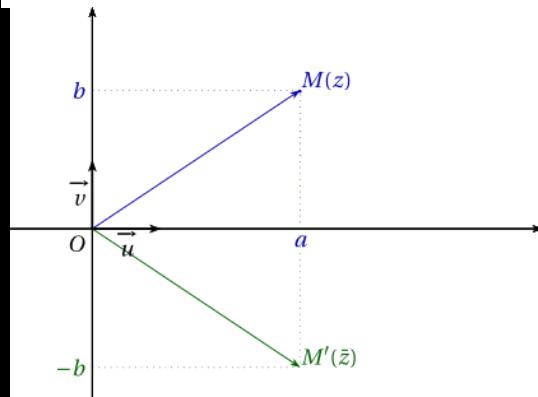
Définition : Soit le nombre complexe $z = a + bi$

(a et b sont des réels) ; le nombre complexe

qu'on note \bar{z} et qui est égale à $\bar{z} = a - bi$

S'appelle le conjugué du nombre complexe z

Si z est l'affixe de M, \bar{z} est l'affixe de M' du symétrique de M par rapport à l'axe des réels.



Exemple : 1) $z = 2 + 3i$ son conjugué est $\bar{z} = 2 - 3i$

2) $z = 3i + 6$ son conjugué est $\bar{z} = -3i + 6$

3) $z = 3 - \sqrt{6}$ son conjugué est $\bar{z} = 3 - \sqrt{6}$

4) $\bar{7} = -7; \bar{2i} = -2i; \bar{-5 - 3i} = -5 + 3i; \bar{3 + 2i} = 3 - 2i$

Propriété : (Règles de calculs) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$

1) si $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$

2) $\bar{z} = z$ 3) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ 4) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$

5) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ 6) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

7) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ 8) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

9) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ 10) $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

11) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ $n \in \mathbb{Z}$

12) $\bar{z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

PREUVE :

- On prouve la 8)

On écrit les complexes z et z' sous forme algébrique : $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$

Et $z' = a' + b'i$ avec $a' \in \mathbb{R}$ et $b' \in \mathbb{R}$

On a alors : $\overline{z \times z'} = \overline{(a+bi)(a'+b'i)}$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = \overline{(aa' - bb') + (ab' + ba')i}$$

$$\overline{z \times z'} = \overline{aa' + ab'i + ba'i - bb'} = \overline{(aa' - bb') - (ab' + ba')i}$$

D'autre part :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = \overline{a+bi} \times \overline{a'+b'i} = (a-bi) \times (a'-ib')$$

$$\bar{z} \times \bar{z}' = aa' - iab' - a'bi - bb' = (aa' - bb') - (ab' + ba')i$$

Ce qui donne bien l'égalité cherchée.

• On prouve la 9)

$$\text{On a : } z \times \frac{1}{z} = 1 \text{ donc } \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}} = \bar{1} \text{ donc } \bar{z} \times \left(\frac{1}{z} \right) = 1$$

$$\text{Donc : } \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{\bar{z}} \text{ c.qfd}$$

• On prouve la 10)

$$\text{On a : } \frac{z'}{z} = z' \times \frac{1}{z} \text{ donc } \left(\frac{z'}{z} \right) = \left(z' \times \frac{1}{z} \right)$$

$$\text{donc } \left(\frac{z'}{z} \right) = \bar{z}' \times \frac{\bar{1}}{\bar{z}} = \bar{z}' \times \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}'}{z}$$

• L'égalité 11) se démontre par récurrence si $n \in \mathbb{N}$

$$\text{En effet : } n=0 \text{ on a } \left(\bar{z}^0 \right) = \left(\bar{z} \right)^0 \text{ car } \bar{1} = 1$$

$$\text{Supposons que } \left(\bar{z}^n \right) = \left(\bar{z} \right)^n$$

$$\text{Montrons que : } \left(\bar{z}^{n+1} \right) = \left(\bar{z} \right)^{n+1} ?$$

$$\left(\bar{z}^{n+1} \right) = \overline{\bar{z}^n \times z} = \bar{z}^n \times \bar{z} = \left(\bar{z} \right)^n \times \bar{z} = \left(\bar{z} \right)^{n+1}$$

$$\text{Donc : } \left(\bar{z}^n \right) = \left(\bar{z} \right)^n \forall n \in \mathbb{N}$$

Si n est négatif alors $m = -n \in \mathbb{N}$

Donc :

$$\left(\bar{z}^n \right) = \left(\bar{z}^{-m} \right) = \left(\frac{1}{z^m} \right) = \frac{1}{\bar{z}^m} = \frac{1}{\left(\bar{z} \right)^m} = \left(\bar{z} \right)^{-m} = \left(\bar{z} \right)^n$$

$$\text{Donc : } \left(\bar{z}^n \right) = \left(\bar{z} \right)^n \forall n \in \mathbb{Z}$$

Exemple1 : Démontrer que $S = (1+i)^5 + (1-i)^5$ est un nombre réel.

Solution : On a :

$$\bar{S} = \overline{(1+i)^5 + (1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5} = \overline{(1+i)^5} + \overline{(1-i)^5}$$

$$\bar{S} = (1-i)^5 + (1+i)^5 = S$$

S est donc bien un nombre réel.

Exemple2 : on pose : $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{et } S = j^{2n} - j^n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$1) \text{montrer que : } j^2 = \bar{j}$$

$$2) \text{Démontrer que : } S \in i\mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Solution : 1)

$$j^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} i \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

$$2) \text{il suffit de montrer que : } S + \bar{S} = 0$$

$$S + \bar{S} = j^{2n} - j^n + \overline{j^{2n} - j^n} = \left(j^2 \right)^n - j^n + \left(j^2 \right)^n - j^n$$

$$S + \bar{S} = \left(\bar{j} \right)^n - j^n + \left(\bar{j}^2 \right)^n - \bar{j}^n = \left(\bar{j} \right)^n - j^n + \left(\bar{j} \right)^n - \bar{j}^n$$

$$S + \bar{S} = \bar{j}^n - j^n + j^n - \bar{j}^n = 0$$

S est donc bien un imaginaire pur

Exemple3 : soit $u \in \mathbb{C}$ tel que $u \notin \mathbb{R}$

$$\text{Montrer que : } (\forall z \in \mathbb{C}) |1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z| \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$

Solution : 1) soit $z \in \mathbb{C}$ tel que :

$$|1+uz| = |1+\bar{u} \cdot z|$$

$$\text{Donc : } |1+uz|^2 = |1+\bar{u} \cdot z|^2$$

$$\text{Donc : } (1+uz)(\overline{1+uz}) = (1+\bar{u} \cdot z)(\overline{1+\bar{u} \cdot z})$$

$$\text{Donc : } (1+uz)(1+\bar{u}z) = (1+\bar{u} \cdot z)(1+u \cdot \bar{z}) \text{ Car : } \bar{u} = u$$

$$\text{Donc : } 1+uz + \bar{u}z + uu\bar{z} = 1+u\bar{z} + \bar{u}z + u\bar{u}\bar{z}$$

$$\text{Donc : } u\bar{z} + \bar{u}z = u\bar{z} + \bar{u}z$$

$$\text{Donc : } (u - \bar{u})z + (\bar{u} - u)\bar{z} = 0$$

$$\text{Donc : } (u - \bar{u})(z - \bar{z}) = 0$$

Et puisque : $u - \bar{u} \neq 0$ car $u \notin \mathbb{R}$

Donc : $z - \bar{z} = 0$ Donc : $z = \bar{z}$

Donc : $z \in \mathbb{R}$

Exercice 2: $z \in \mathbb{C}$

Écrire en fonction de \bar{z} le conjugué des nombres complexes suivants :

$$1) Z_1 = (2+i)(5-i) \quad 2) Z_2 = 2z + 5i \quad 3) Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

Solution :

$$1) \bar{Z}_1 = \overline{(2+i)(5-i)} = \overline{(2+i)} \times \overline{(5-i)} = (2-i)(5+i)$$

$$2) \bar{Z}_2 = \overline{2z+5i} = \overline{2z} + \overline{5i} = 2\bar{z} - 5i$$

$$3) \bar{Z}_3 = \overline{\left(\frac{z-1}{-3z+i} \right)} = \frac{\overline{z-1}}{\overline{-3z+i}} = \frac{\bar{z}-1}{-3\bar{z}-i}$$

Exercice 3: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1) 2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad 2) z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

Solution : 1) $z \in \mathbb{C}$

donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ / $z = x + yi$

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \Leftrightarrow 2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 4i$$

$$(2x + y) + i(2y + x) = 5 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -4y - 2x + 2x + y = 8 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5 \\ -3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{3}$$

$$\text{Donc : } x = \frac{14}{3} \text{ par suite: } z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i \right\}$$

2) $z \in \mathbb{C}$ donc : $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ / $z = x + yi$

$$z = 2\bar{z} - 2 + 6i \Leftrightarrow x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$$

$$\text{Donc : } S = \{2 + 2i\}$$

Exercice 4 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = (z - 2i)(\bar{z} - 1)$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

3) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur

Solution : 1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } U = (x + yi - 2i)(x - yi - 1)$$

$$\text{Donc : } U = (x + i(y - 2))((x - 1) - yi)$$

$$\text{Donc : } U = (x^2 + y^2 - x - 2y) + i(-y - 2x + 2)$$

$$\text{Donc : } \text{Re}(U) = x^2 + y^2 - x - 2y \text{ et } \text{Im}(U) = -y - 2x + 2$$

$$2) U \text{ est réelssi } \text{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation :

$$(\Delta) : -y - 2x + 2 = 0$$

$$3) U \text{ est imaginaire purssi } \text{Re}(U) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2 \times 1y + 1^2 - 1^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

l'ensemble (C) des points $M(z)$ tels que : U est imaginaire pur est le cercle de centre : $\Omega\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\text{et de rayon : } R = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Exercice 5 :

A) Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$1) 2z - 3\bar{z} + 1 + 2i = 0 \quad 2) z + (1 - i)\bar{z} + 3 - 2i = 0$$

$$3) (3+i)z + \bar{z} = -i$$

B) Déterminer les ensembles suivants :

$$1) (E1) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in \mathbb{R}\}$$

$$2) (E2) = \{M(z) / \frac{z-2i}{z+i} \in i\mathbb{R}\}$$

Exercice6 : Démontrer que :

$S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1}$ est un nombre réel $\forall n \in \mathbb{Z}$

Solution : On a :

$$(i-\sqrt{3})^{2n+1} = (-(\sqrt{3}-i))^{2n+1} = (-1)^{2n+1} \times (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$$

$$\text{Donc: } (i-\sqrt{3})^{2n+1} = -(\sqrt{3}-i)^{2n+1} \text{ car } (-1)^{2n+1} = -1$$

$$\text{Donc: } S = (\sqrt{3}+i)^{2n+1} + (\sqrt{3}-i)^{2n+1}$$

$$\bar{S} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1} - (i-\sqrt{3})^{2n+1}} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1}} - \overline{(i-\sqrt{3})^{2n+1}}$$

$$\bar{S} = \overline{(\sqrt{3}+i)^{2n+1}} - \overline{(\sqrt{3}-i)^{2n+1}} = (\sqrt{3}-i)^{2n+1} + (\sqrt{3}+i)^{2n+1}$$

$$\text{Donc: } \bar{S} = S$$

donc S est bien un nombre réel.

Exercice7 : dans le plan complexe on considère le nombre complexe U et soit M l'image du nombre complexe z et on pose : $U = 2iz - \bar{z}$

Et $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

1) écrire en fonction de x et y la partie réel et la partie imaginaire de U

2) Déterminer l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel

Solution : 1) $z = x + yi$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc: } U = 2i(x+yi) - (x-yi) = 2ix - 2y - x + yi$$

$$\text{Donc: } U = (-2y-x) + i(y+2x)$$

$$\text{Donc: } \operatorname{Re}(U) = -2y - x \text{ et } \operatorname{Im}(U) = y + 2x$$

$$2) U \text{ est réel ssi } \operatorname{Im}(U) = 0 \Leftrightarrow (\Delta): y + 2x = 0$$

Donc : l'ensemble (Δ) des points $M(z)$ du plan tels que : U est réel est la droite d'équation : $(\Delta): y = -2x$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Définition et applications

Définition : Soit $z = x + yi$ un nombre complexe avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

le réel positif $\sqrt{x^2 + y^2}$ 2 s'appelle le module du nombre complexe z et on le note $|z|$

Exemple : calculer le module des nombres

$$\text{complexes suivants : 1) } z = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 2) } z' = 3 - 4i$$

Solution :

$$|z| = \left| \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

$$|z'| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5; | -2i | = \sqrt{(-2)^2} = 2$$

Propriété : Soit $z = x + yi$ un nombre complexe ;

$$\text{on a } |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

Preuve : en exercice

Exercice :

A) Déterminer les modules des complexes suivants :

$$1) z_1 = 3 + \sqrt{3}i \quad 2) z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}i \quad 3) z_3 = \frac{1}{1+i}$$

$$4) z_4 = x \text{ où } x \in \mathbb{R}$$

B) Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

$$1) u_1 = \frac{2+5i}{1+3i} \quad 2) u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}} \quad 3) u_3 = (2-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+i)$$

C) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $A(z)$; $B(\bar{z})$ et $C(\frac{1}{z})$ soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés : Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans \mathbb{N} on a :

$$1) |\bar{z}| = |-z| = |z| \quad 2) |z|^2 = z\bar{z} \quad 3)$$

$$|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$4) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad 5) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$6) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|} \text{ si } z \neq 0$$

$$7) |z^n| = |z|^n \text{ si } z \neq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$8) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Exemple : calculer le module des nombres

complexes suivants : 1) $z_1 = 5(1 + i\sqrt{3})$

$$2) z_2 = (1 + i)(\sqrt{3} - i) \quad 3) z_3 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^3$$

Solution :

$$1) |z_1| = |-5(1 + i\sqrt{3})| = |-5| |1 + i\sqrt{3}| = 5\sqrt{1 + 3} = 10$$

$$2) |z_2| = |(1 + i)(\sqrt{3} - i)| = |1 + i| \times |\sqrt{3} - i| = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$3) |z_3| = \left| \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^3 \right| = \left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right|^3 = \left(\left| \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right| \right)^3 = \left(\frac{|1 + i\sqrt{3}|}{|1 - i|} \right)^3$$

$$|z_3| = \left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}} \right)^3 = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$

2) Interprétation géométrique du module :

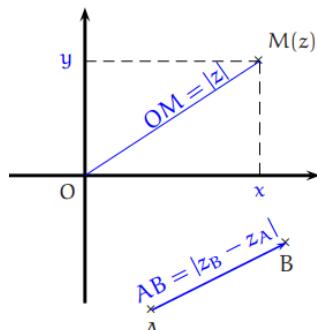
Le plan est rapporté à un repère orthonormé
soit M l'image du nombre complexe $z = x + iy$

avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ on

a : $M(x; y)$ donc :

$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\text{Donc : } |z| = OM$$



Propriété : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B ,

$$\text{alors : } \|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$$

Preuve : soit M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$

On a donc : $z_M = z_B - z_A$ avec z_M l'affixe de M

$$\text{Donc : } |z_B - z_A| = |z_M| = OM = AB$$

Exemple 1 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$; les points A , B et C

ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 3 + i\sqrt{3}$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral

Solution : il suffit de montrer que : $AC = AB = BC$

$$AB = |z_B - z_A| = |1 + \sqrt{3}i - 2| = |-1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$AC = |z_C - z_A| = |3 + \sqrt{3}i - 2| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BC = |z_C - z_B| = |3 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i| = |2| = 2$$

Donc : $AC = AB = BC$

Exemple 2 : Déterminer l'ensemble (Δ) des points

M d'affixe z tels que : $|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i|$

Solution :

Méthode 1 : Méthode géométrique :

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |z - (1 + 2i)| = |z - (7 - 2i)|$$

On pose : $A(z_A = 1 + 2i)$ et $B(z_B = 7 - 2i)$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du

segment $[AB]$

Méthode 1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z - 1 - 2i| = |z - 7 + 2i| \Leftrightarrow |x + yi - 1 - 2i| = |x + yi - 7 + 2i|$$

$$\Leftrightarrow |x - 1 + i(y - 2)| = |x - 7 + i(y + 2)|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-7)^2 + (y+2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 14x + 49 + y^2 + 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 12x - 8y - 48 = 0 \Leftrightarrow (\Delta) : 3x - 2y - 12 = 0$$

Exercice 8: Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : a) $|z - 3 + i| = 5$

b) $|z - 4 - 5i| = |z + 2|$

Solution :

a) Soit A le point d'affixe $3 - i$

$$|z - 3 + i| = 5 \Leftrightarrow AM = 5$$

L'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 5 .

b) Soient B et C les points d'affixes $4 + 5i$ et -2

$$|z - 4 - 5i| = |z + 2| \Leftrightarrow BM = CM$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[BC]$

Exercice 9: Déterminer l'ensemble (C) des points

M d'affixe z tels que : $|z - 2i| = 3$

Solution :

Méthode 1 : Méthode géométrique :

$$|z - 2i| = 3 \text{ On pose : } A(z_A = 2i)$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = 3 \Leftrightarrow AM = 3$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0; 2)$ et de rayon : $R = 3$

Méthode 1 : Méthode algébrique :

$z \in \mathbb{C}$ donc $\exists x \in \mathbb{R}$ et $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que : $z = x + yi$

$$|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + yi - 2i| = 3 \Leftrightarrow |x + i(y - 2)| = 3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

L'ensemble (C) cherché est le cercle de centre :

$A(0; 2)$ et de rayon : $R = 3$

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble (Δ) des

$$\text{points } M \text{ d'affixe } z \text{ tels que : } |iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right|$$

Solution :

Méthode 1 : Méthode géométrique :

$$|iz + 3| = \left| \frac{1}{i} z - 4i + 1 \right| \Leftrightarrow |i(z - 3i)| = \left| \frac{1}{i} (z + 4 + i) \right|$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z + 4 + i| \text{ car } |i| = \left| \frac{1}{i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - 3i| = |z - (-4 - i)|$$

On pose : $A(z_A = 3i)$ et $B(z_B = -4 - i)$

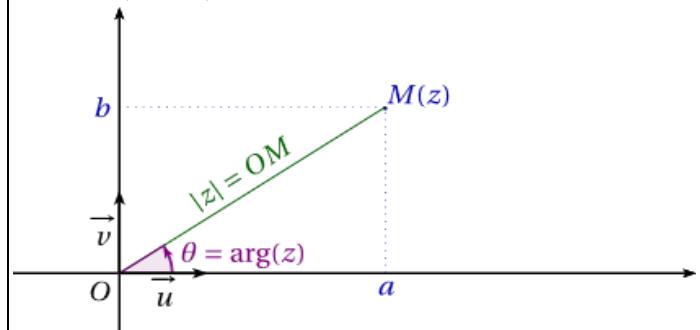
$$\Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

L'ensemble (Δ) cherché est la médiatrice du segment $[AB]$

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition : Le plan complexe est muni d'un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et $M(z)$ son image. On appelle argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. On le note par $\arg(z)$



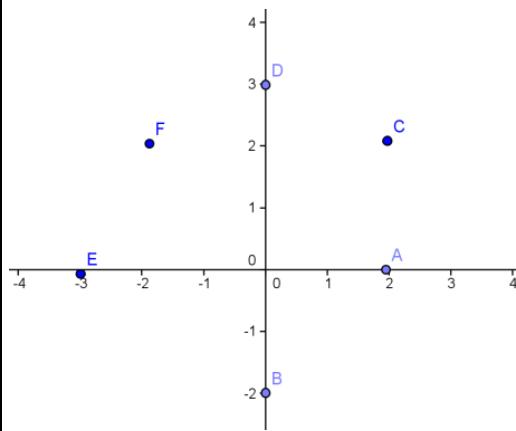
Exemple : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$;

on considère les points A ; B ;C ;D ;E ;F qui ont pour affixes: $z_A = 2$ et $z_B = -2i$ et $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = 3i$ et $z_E = -3$ et $z_F = -2 + 2i$

1) Représenter les points A ; B ;C ;D ;E ;F dans Le plan complexe

2) on utilisant la représentations déterminer l'argument des complexes : z_A et z_B et z_C et z_D et z_E et z_F

Solution :1)



2) $\arg z_A = 0[2\pi]$ et $\arg z_B = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_C = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\arg z_D = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg z_E = \pi[2\pi]$ et $\arg z_F = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Remarque : le complexe nul n'a pas d'argument

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

1) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ 2) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

3) $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y > 0$ et $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si

$y < 0$

4) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ 5) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

Exemple : $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\arg(-3i) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\arg(2) \equiv 0[2\pi]$ et $\arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$

2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + bi$ un complexe non nul, on a donc

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et par suite :

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

Or : si $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

alors : $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Et finalement : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$

Propriété : Tout nombre complexe non nul z a une écriture de la forme $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ Où $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z

Exercice11 :

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

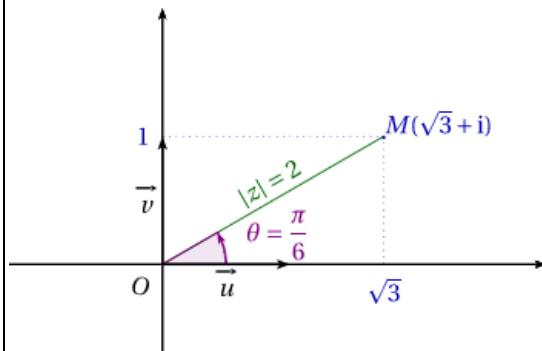
1) $z_1 = \sqrt{3} + i$ 2) $z_2 = 1 - i$ 3) $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i$

4) $z_3 = -1 - \sqrt{3}i$ 5) $z = 7$ 6) $z = -12$

Solution :1) $|z_1| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$

$$z_1 = \sqrt{3} + 1i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\arg z_1 = \frac{\pi}{6}[2\pi]$$



2) $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Et on a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ donc :

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \quad \arg z_2 \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$$

$$3) z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \quad |z_3| = \sqrt{\frac{3}{36} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Et on a : $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$

Donc:

$$z_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$4) z_3 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$|z_3| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_3 = -1 - \sqrt{3}i = 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$$z_4 = 2 \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

Propriété : $z \in \mathbb{C}^*$

Si on a $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r > 0$

Alors $|z| = r$ et $\arg z \equiv \theta[2\pi]$

Exemple : Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants avec $\theta \in]-\pi; \pi[- \{0\}$

$$1) z_1 = \sin \theta + i \cos \theta \quad 2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Solution : 1)

$$z_1 = \sin \theta + i \cos \theta = 1 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \right)$$

Donc : c'est forme trigonométrique du nombre

complexe z_1 donc $|z_1| = 1$ et $\arg z \equiv \frac{\pi}{2} - \theta[2\pi]$

$$2) z_2 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - i 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} - i \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\bullet \text{ Si } \theta \in]0; \pi[\text{ alors : } \frac{\theta}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ donc } 2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$$

Donc : la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 est :

$$z_2 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta - \pi}{2}[2\pi]$$

$$\bullet \text{ Si } \theta \in]-\pi; 0[\text{ alors : } \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[\text{ donc } 2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta + \pi}{2}[2\pi]$$

$$3) z_3 = \sin \theta + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + 2i \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

• Si $\theta \in]0; \pi[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]0; \frac{\pi}{2}[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} > 0$

Donc : la forme trigonométrique du nombre

complexe z_3 est : $z_3 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

$$|z| = 2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

• Si $\theta \in]-\pi; 0[$ alors : $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$ donc $2 \sin \frac{\theta}{2} < 0$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(-\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)$$

$$z_2 = -2 \sin \frac{\theta}{2} \left(\cos \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right) \right)$$

Donc : c'est la forme trigonométrique du nombre complexe z_2 et on a :

$$|z| = -2 \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \arg z \equiv \pi + \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ et $\arg(z') \equiv \theta' [2\pi]$

On donc :

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ et } z' = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\ &= |z||z'|(\cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' + i \sin \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta') \\ &= |z||z'|(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta)) = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

(En utilisant les formules de transformations)

Propriété principale : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

$$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

$$1) \arg(1/z) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$2) \arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$$

$$3) \arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi]$$

$$4) \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi [2\pi]$$

$$5) \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

Preuves (en exercice)

Notations : Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ c'est-à-dire $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

On écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs :

$$1) [r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$$

$$2) 1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$$

$$3) [r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$$

$$4) -[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$$

$$5) \bar{[r, \theta]} = [r, -\theta]$$

$$6) [r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

Exemple : on considère les nombres complexes :

$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = 1 - i \text{ et } Z = \frac{z_1}{z_2} \text{ et } U = z_1^6 \times z_2^2$$

1) Ecrivez les nombres complexes z_1 ; z_2 et Z et

sous leurs formes trigonométriques.

2) Ecrire le complexe Z sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Solution : 1) $z_1 = \sqrt{3} - i$

$$|z_1| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

On a : $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$

$$\text{Donc : } z_1 = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]$$

$$\text{On a : } |z_2| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$z_2 = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right)$$

$$U = z_1^6 \times z_2^2 = \left[2; -\frac{\pi}{6} \right]^6 \times \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]^2$$

$$U = \left[2^6; -\pi \right] \times \left[2; -\frac{\pi}{2} \right] = \left[2^7; -\pi + \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$U = 2^7 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) \right) = 2^7 (0 + 1i) = 2^7 i$$

2)

$$Z = \frac{\sqrt{3}-i}{1-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}i - i - 1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$Z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + i \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Exercice 12 : Ecrire le complexe $Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8$

Sous sa forme algébrique

Solution : On va d'abord écrire $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2}$

Sous la forme trigonométrique

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } Z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{6}}{2} \right)^8 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^8$$

$$Z = \left[\sqrt{2}^8; \frac{8\pi}{3} \right] = 16 \left(\cos\frac{8\pi}{3} + i \sin\frac{8\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos\frac{6\pi + 2\pi}{3} + i \sin\frac{6\pi + 2\pi}{3} \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$Z = 16 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 16 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$Z = -8 + 8\sqrt{3}i$$

Exercice 13 : Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

$$1) z = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad 2) z = -5 - 5i \quad 3) z = -6 + 6\sqrt{3}i$$

$$4) z = (3 - 3i)^4 \quad 5) z = -2 - 2\sqrt{3}i \quad 6) z = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$$

$$7) z = (\sqrt{3} + 3i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad 8) z = \frac{1}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

$$9) z = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}$$

4) Les formes trigonométriques des racines carrées .

Définition : On appelle racine carrée d'un complexe z tout complexe u tel que $u^2 = z$

Remarque : Un complexe non nul admet deux racines carrées.

Preuve : d'une propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul et $u = [\rho, \alpha]$ une racine de z donc $u^2 = z$ ce que se traduit

$$\text{par : } \begin{cases} \rho^2 \equiv r \\ 2\alpha \equiv \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho \equiv \sqrt{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta + 2k\pi}{2} \end{cases} \text{ avec } k \in \{0;1\}$$

Propriété : Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r, \theta]$ sont les complexes :

$$u_1 = \left[\sqrt{r}; \frac{\theta}{2} \right] \text{ et } u_2 = \left[\sqrt{r}; \frac{\theta}{2} + \pi \right] = -u_1$$

Exemple : Déterminer les racines carrées de

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ ? On a : } |z| = 1 \text{ et } \arg z \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

Donc les racines carrées de z sont :

$$u_1 = \left[1; \frac{\pi}{12} \right] = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \text{ et } u_2 = -u_1$$

Exercice 14 : Soit le complexe :

$$u = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$$

1) Calculer u^2 puis déterminer la forme trigonométrique de u^2

2) En déduire la forme trigonométrique de u

VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$;

On sait que si le nombre complexe z est non nul alors : $(\vec{e}_1; \vec{OM}) \equiv \arg z [2\pi]$

□ Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et M' , on a

$$(\vec{OM}; \vec{OM}') \equiv (\vec{OM}; \vec{e}_1) + (\vec{e}_1; \vec{OM}') [2\pi]$$

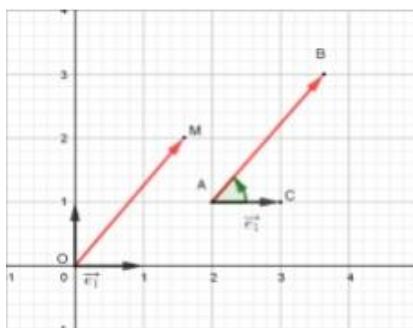
$$\equiv -(\vec{e}_1; \vec{OM}) + (\vec{e}_1; \vec{OM}') [2\pi]$$

$$(\vec{OM}; \vec{OM}') \equiv \arg z' - \arg z [2\pi] \equiv \arg \frac{z'}{z} [2\pi]$$

Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b , on sait qu'il existe un

unique point M tel que $\vec{AB} = \vec{OM}$ et M aura

Pour affixe le complexe $(b - a)$



$$\text{Donc : } (\vec{e}_1; \vec{AB}) \equiv \arg(b - a) [2\pi]$$

Soient A , B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a , b et c , on a :

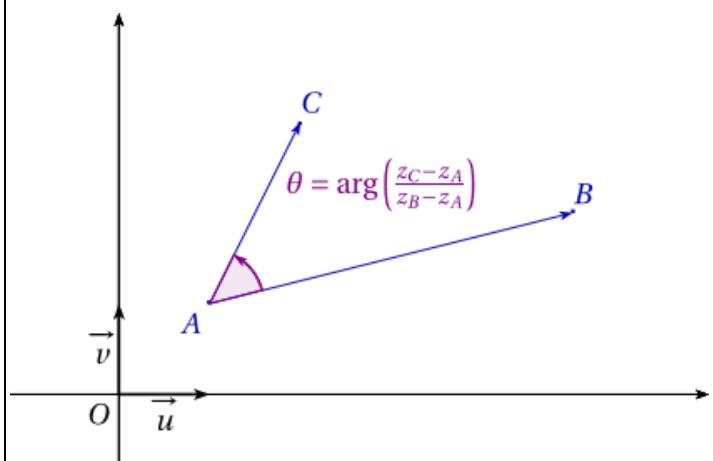
$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv (\vec{AB}; \vec{e}_1) + (\vec{e}_1; \vec{AC}) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv -(\vec{e}_1; \vec{AB}) + (\vec{e}_1; \vec{AC}) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv -\arg(b - a) + \arg(c - a) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \arg(c - a) - \arg(b - a) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) [2\pi]$$



Soient A , B , C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a , b , c et d

$$\text{on a : } (\vec{AB}; \vec{CD}) \equiv (\vec{AB}; \vec{AC}) + (\vec{AC}; \vec{CD}) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{CD}) \equiv (\vec{AB}; \vec{AC}) + (\vec{CA}; \vec{CD}) + \pi [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) + \arg\left(\frac{d - c}{a - c}\right) + \arg(-1) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{CD}) \equiv \arg\left(-\frac{c - a}{b - a}\right)\left(\frac{d - c}{a - c}\right) [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right) [2\pi]$$

Propriété : 1) Soient M et M' et A , B , C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z , z' , a , b , c et d on a :

$$1) (\vec{OM}; \vec{OM}') \equiv \arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi]$$

$$2) \left(\overrightarrow{e_1; \overrightarrow{AB}} \right) \equiv \arg(b-a)[2\pi]$$

$$3) \left(\overrightarrow{AB; \overrightarrow{AC}} \right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

$$4) \left(\overrightarrow{AB; \overrightarrow{CD}} \right) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$$

Exemple : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $z_A = 3 + 5i$, $z_B = 3 - 5i$ et $z_C = 7 + 3i$

$$1) \text{montrer que : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i$$

2)monter que ABC est un triangle rectangle et que : $BC = 2AC$

$$\text{Solution :} 1) \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-4 - 8i}{-4 + 2i} = \frac{2i(-4 + 2i)}{-4 + 2i} = 2i$$

$$\left(\overrightarrow{CA; \overrightarrow{CB}} \right) \equiv \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{CA; \overrightarrow{CB}} \right) \equiv \arg(2i)[2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{CA; \overrightarrow{CB}} \right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc : ABC est un triangle rectangle en C

$$\text{On a : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i \text{ donc: } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = |2i|$$

$$\text{Donc : } \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = 2 \text{ donc: } \frac{BC}{AC} = 2$$

Donc : $BC = 2AC$

Exemple15 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$;

Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2i$, $b = \sqrt{2}(1+i)$ et

$$c = a + b$$

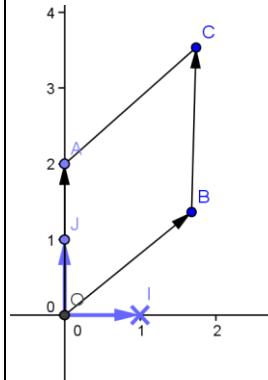
1)Montrer que OBCA est un losange

$$2) \text{Montrer que : } \arg c \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$$

Solution :

$$1) \text{On a : } c = a + b \text{ donc : } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Donc OBCA est un parallélogramme



$$\text{on a : } |a - 0| = |2i| = 2 = OA$$

$$OB = |b - 0| = |\sqrt{2}(1+i)| = |\sqrt{2}| |(1+i)| = \sqrt{2} \sqrt{2} = 2$$

alors : $OB = OA$

donc OBCA est un losange

$$2) \arg c \equiv \left(\vec{i}; \overrightarrow{OC} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\vec{i}; \overrightarrow{OB} \right) + \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC} \right) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\vec{i}; \overrightarrow{OB} \right) + \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA} \right) [2\pi] \text{ (OBCA : losange)}$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} \arg \frac{a}{b} [2\pi]$$

$$\equiv \arg b + \frac{1}{2} (\arg a - \arg b) [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg c \equiv \frac{1}{2} (\arg a + \arg b) [2\pi]$$

$$\text{Or : } a = 2i \text{ donc : } \arg a \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{Et : } b = \sqrt{2}(1+i) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \text{ donc } \arg b \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\text{Donc : } \arg c \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) [2\pi]$$

Donc : $\arg c \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$

Exercice16 : Soient A, B et C des points dans le plan complexe d'affixes respectifs $a = 2+i$, $b = 3+2i$ et $c = 5-i$

Soit α une mesure de l'angle orienté : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

Calculer $\tan \alpha$

Solution : On a : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

Donc : $\alpha = \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{3-2i}{1+i} = \frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-5i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$\text{Donc : } \frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{26}}{2} (\cos \alpha + i \sin \alpha) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$\text{Donc : } \sqrt{26} \cos \alpha = 1 \text{ et } \sqrt{26} \sin \alpha = -5$$

$$\text{Donc : } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} \text{ et } \sin \alpha = \frac{-5}{\sqrt{26}}$$

$$\text{Donc : } \tan \alpha = -5$$

Exercice17 : On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ et $z_2 = 1+i$ et $z_3 = 1-i$

- 1) Placer dans le repère \mathcal{R} les points A, B et C
- 2) Déterminer le module et l'argument du nombre

complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB})$

3) Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment [BC] et en déduire que :

$$(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

4) Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire : Trois points A(a), B(b) et C(c) sont alignés si et seulement si : $\arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \equiv 0 [2\pi]$

Preuve : On sait que : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) [2\pi]$

Et $\frac{c-a}{b-a} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = r$ et

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv \theta [2\pi]$$

A(a), B(b) et C(c) sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \equiv k\pi [2\pi] \Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -r$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$$

Exercice18 : 1° Vérifier que les points A(5+3i), B(2+i) et C(-1-i) sont alignés

2° Est ce que les points M(-2+2i), N(2-i) et N(1-i) sont alignés ?

2.2 droites parallèles

Corolaire : A(a), B(b) et C(c) et D(d)

$(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si : $\arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv 0 [2\pi]$

Ou $\arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \pi [2\pi]$

2.3 droites perpendiculaires

Corolaire : A(a), B(b) et C(c) et D(d)

$(AB) \perp (CD)$ si et seulement si :

$\arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ou $\arg \left(\frac{a-b}{c-d} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

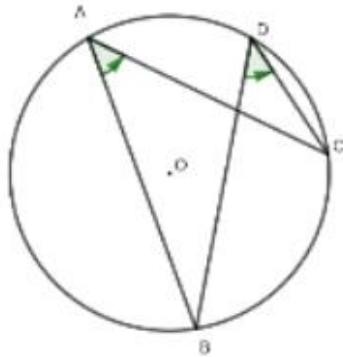
2.4 Cocyclicité de 4 points.

Rappelle : Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC , le point D appartient au cercle (C) si et seulement si :

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}\right) [2\pi] \text{ ou } \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}\right) [2\pi]$$

1^{er} CAS :

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}\right) [2\pi]$$

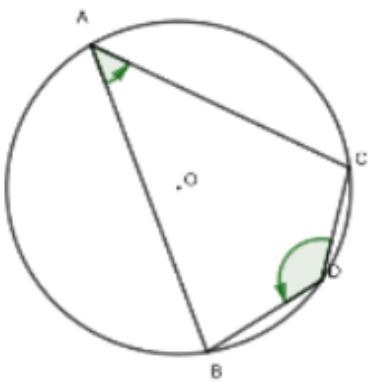


Ceci se traduit par :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &\equiv \arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) [2\pi] \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) - \arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) &\equiv 0 [2\pi] \\ \Leftrightarrow \arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right)\right] &\equiv 0 [2\pi] \\ \Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) &\in \mathbb{R}^{*+} \end{aligned}$$

2^{ier} CAS :

$$\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DB}\right) [2\pi]$$



Ceci se traduit par :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &\equiv \pi - \arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) [2\pi] \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + \arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) - \pi &\equiv 0 [2\pi] \\ \Leftrightarrow \arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \times (-1)\right] &\equiv 0 [2\pi] \\ \Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) &\in \mathbb{R}^{*-} \end{aligned}$$

Théorème : Soit $A(a), B(b), C(c)$ et $D(d)$ quatre points dans le plan complexe.

Les points A, B, C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} \in \mathbb{R}^*$

Exercice 19 : Dans le plan complexe, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} \text{ Soit un imaginaire pur.}$$

Solution : Pour répondre à cette question, on peut écrire Z sous forme algébrique et dire que sa partie réelle est nulle ou il suffit de calculer la partie réelle.

Il faut que $z \neq 1$. On note $A(1)$

$$z \in \mathbb{C} \text{ donc } \exists x \in \mathbb{R} \text{ et } \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que : } z = x + yi$$

$$Z = \frac{5z-2}{z-1} = \frac{5x-2+5iy}{x-1+iy} = \frac{(5x-2+5iy)(x-1-iy)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-5x-2x+2+5y^2)+i(-5xy+2y+5xy-5y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$Z = \frac{(5x^2-7x+2+5y^2)-3iy}{(x-1)^2+y^2}$$

Z est un imaginaire pur

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x^2+5y^2-7x+2}{(x-1)^2+y^2} = 0 \\ z \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5y^2-7x+2 = 0 \\ x \neq 1 \text{ ou } y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2-\frac{49}{100}+\frac{2}{5}=0$$

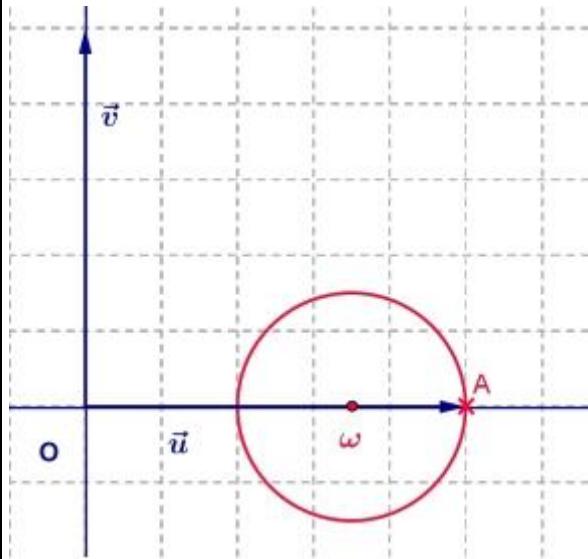
$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{7}{10}\right)^2+y^2=\frac{9}{100}$$

Il s'agit de l'équation du cercle (C) de centre

$$\omega\left(\frac{7}{10} + 0i\right) \text{ et de rayon } \frac{3}{10}.$$

Le point A(1) appartient à (c).

L'ensemble cherché est donc le cercle (C) privé de A.



Exercices 20 :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels

$$\text{que : } \left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1$$

Solution :

Première méthode (méthode algébrique)

$$z = x + yi \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

On doit avoir : $z \neq -1 + i$

$$z - 2 = x - 2 + yi$$

$$z + 1 - i = x + 1 + i(y - 1)$$

$$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-2| = |z+1-i|$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow -6x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 3x - 1$$

L'ensemble cherché est la droite (D) d'équation

$$y = 3x - 1$$

Deuxième méthode (méthode géométrique)

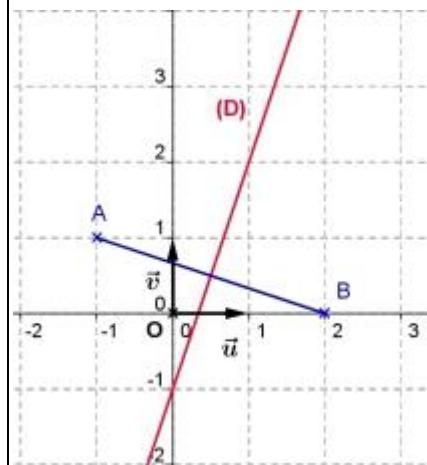
On pose : A(-1+i) et B(2) et M(z)

$$\overrightarrow{AM}(z+1-i) \text{ donc } |z+1-i| = AM$$

$$\overrightarrow{BM}(z-2) \text{ donc } |z-2| = BM$$

$$\left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-2}{z+1-i} \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment [AB].



Exercice 21 : soit a et b et c des nombres

complexes tels que : $|a|=|b|=|c|=1$ et $a \neq c$ et $b \neq c$

$$1) \text{Montrer que : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{en déduire que : } \arg \left(\frac{c-b}{c-a} \right) \equiv \frac{1}{2} \arg \left(\frac{b}{a} \right) \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$\text{Solution : } \left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\bar{c} - \bar{b}}{\bar{c} - \bar{a}} \right)^2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}}$$

On a si : $|z|=1$ alors : $\bar{z} = \frac{1}{z}$ donc :

$$\left(\frac{c-b}{c-a} \right)^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}} \right)^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{\frac{b-c}{bc}}{\frac{a-c}{ac}} \right)^2 \times \frac{b}{a}$$

$$\frac{\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}}{\left(\frac{1}{c-a}\right) \times \frac{1}{b}} = \left(\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}\right)^2 \times \frac{a}{b} = \left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{b}{a}$$

Donc : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

2)puisque : $\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$ alors :

$$\arg\left(\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 \times \frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$$

Donc : $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right)^2 + \arg\left(\frac{a}{b}\right) \equiv 0[\pi]$

Donc : $2\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv -\arg\left(\frac{a}{b}\right)[\pi]$

$$\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) \equiv \frac{1}{2}\arg\left(\frac{b}{a}\right)\left[\frac{\pi}{2}\right]$$

« *C'est en forgeant que l'on devient forgeron* »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien



Bon courage