NOMBRES COMPLEXES

Partie 1

I) L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1) Approche historique :

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVIe siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre deCardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle *sophistiqué*. C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors *impossibles* avant de leur donner le nom d'imaginaires.

Durant trois siècles, ces *nombres* sont regardés avec méfiance, n'en étant pas vraiment mais permettant des raccourcis intéressants tant en algèbre que dans la toute nouvelle branche du calcul infinitésimal. Les mathématiciens du XVIIIe siècle tentent avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire, tantôt avec succès, comme pour l'exponentielle complexe, tantôt avec plus d'aléas, comme pour la fonction racine *n*-ième ou la fonction logarithme complexe.

Durant la première moitié du XIXe siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définie sur des couples de réels. Cependant leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et l'analyse et l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique que dans le domaine de l'électricité, en avaient déjà fait des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques.

fr.wikipedia.org

2) Définition d'un nombre complexe.

2.1 L'ensemble $\mathbb{C}$

On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles **des nombres complexes** qui vérifie :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- On définit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux opérations appelées la somme et le produit et qui prolonge la somme et le produit dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient un nombre non réel noté i et qui vérifie $\boldsymbol{i^2 = -1}$
- Tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme : $\boldsymbol{z = a + ib}$ où a et b sont des réels
  - Le réel a s'appelle **la partie réel** du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{a = Re(z)}$
  - Le réel a s'appelle **la partie imaginaire** du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b = Im(z)}$
  - L'écriture : $\boldsymbol{z = a + ib}$ s'appelle **l'écriture algébrique du nombre complexe z .**

2.2 Relations algébriques

- $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- $a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$
- $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(z') \\ Im(z) = Im(z') \end{cases}$

2.3 Remarque :

- L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné, c'est-à-dire : $(\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2)(x \leq y \text{ ou } y \leq x)$
- L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.

2.3 Des sous-ensembles de $\mathbb{C}$

- L'ensemble $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels est une partie de $\mathbb{C}$; $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$
  $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle **L'ensemble des imaginaires purs ;** $\boldsymbol{i\mathbb{R} = \{iy / \ y \in \mathbb{R}\}}$
  $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$
- $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ $\quad \mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ $\quad$ ($\subsetneq$ veut dire strictement inclus strictement $2 + 3i \notin \mathbb{R}$ et $2 + 3i \notin i\mathbb{R}$)

II) LES OPERATIONS DANS $\mathbb{R}$.

1) L'addition dans $\mathbb{R}$.

1.1 Définition

Définition :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
La somme des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z + z'$ définie par :
$\boldsymbol{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$
On en déduit que : $\begin{cases} Re(z + z') = Re(z) + Re(z') \\ Im(z + z') = Im(z) + Im(z') \end{cases}$

1.2 Propriétés

L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- Associative :$(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)((z + z_1) + z_2 = z + (z_1 + z_2))$
- Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z + z' = z' + z)$
- 0 est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(0 + z = z + 0 = z)$
- Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$; $z + (-z) = (-z) + z = 0$

On dit que $\mathbb{C}$ muni de l'addition est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}, +)$

1.3 La différence de deux nombres complexes.

Soient z et z' deux nombres complexes tels que : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$
La différence de z et z' est la somme de z avec le symétrique de z' c'est-à-dire : $z + (-z')$ qu'on la note : $z - z'$

$$\boldsymbol{z - z' = (a - a') + i(b - b')}$$

2) La multiplication dans $\mathbb{C}$.

2.1 Définition :

Comme la multiplication dans $\mathbb{C}$ prolonge celle dans $\mathbb{R}$ on peut définir la multiplication dans $\mathbb{C}$ par :
Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes.
Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre complexe noté $z \times z'$ définie par :

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib) \times (a' + ib') \\ &= aa' + ab'i + iba' + bb'i^2 \qquad (i^2 = -1) \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')}$$

2.2 Propriétés

La multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- Associative :$(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)((z \times z_1) \times z_2 = z \times (z_1 \times z_2))$
- Commutative : $(\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2)(z \times z' = z' \times z)$
- 1 est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$: $(\forall z \in \mathbb{C})(1 \times z = z \times 1 = z)$
- Chaque élément non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : $\left(\frac{1}{z}\right)$ ou z^{-1};
  $z \times \left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{z}\right) \times z = 1$

On dit que $\mathbb{C}^*$ muni de la multiplication est un groupe commutatif, on le note par : $(\mathbb{C}*, \times)$
En plus des 8 propriétés que vérifient l'addition et la multiplication dans l'ensemble $\mathbb{C}$ il y a une propriété commune entre les deux opérations :

- La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$:
  $(\forall (z, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3)(z \times (z_1 + z_2) = z \times z_1 + z \times z_2)$

Définition :

Puisque $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et $(\mathbb{C}^*, \times)$ est un groupe commutatif et a multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$; on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2.2 Le quotient de deux complexes.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes où $z' \neq 0$ le quotient des nombres z et z' est le produit de z et de l'inverse de z' et se note $\frac{z}{z'}$ ou $z(z'^{-1})$

2.3 Règles de calculs dans $\mathbb{C}$

$(\mathbb{C},+,\times)$ étant un corps commutatif ; toutes les règles de calculs qu'on a connu dans $\mathbb{R}$ sont vraies dans $\mathbb{C}$.

- $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$
- $z^0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}_{n\ fois}$
- $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$
- $z^{n+m} = z^n\, z^m$
- $z^{n-m} = \frac{z^n}{z^m}$
- $(z^n)^m = z^{m\times n}$
- $z^n - z_1^n = (z - z_1)(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \cdots + zz_1^{n-2} + z_1^{n-1})$
- Si $z \neq 1$ alors $S = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ somme des termes d'une suite géométrique
- $(z + z_1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n z^k\, z_1^{n-k}$ formule de binôme

2.4 Applications

Exercice 1:

1- Calculer i^3 et i^4 , en déduire i^n en fonction de n.

2- Calculer la somme $S = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2018}$; écrire S sous sa forme algébrique.

Exercice 2 :

1- Factorise $2x^2 + 5$

2- Résoudre l'équation $2x^2 + 5 = 0$

Exercice 3 :

1- Effectuer la division Euclidienne de $P(z) = 3z^3 + 2iz^2 - 3z + 2i$ par $(z + 2i)$

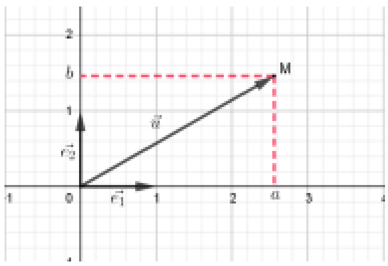
2- $-2i$ est il une racine de P.

III) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) L'interprétation géométrique.

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$; et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a,b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.

- L'application : $\begin{array}{l}\mathbb{C} \to (\mathcal{P}) \\ z \mapsto M(a,b)\end{array}$ où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection
- Le point M s'appelle **l'image du nombre complexe dans le plan** $(\mathcal{P})$, et l'application
- Le complexe z s'appelle **l'affixe du point M** on écrit : $z = aff(M)$ on écrit $z_M = a + ib$
- L'application : $\begin{array}{l}\mathbb{C} \to \mathcal{V}_2 \\ z \mapsto \vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\end{array}$ où $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$ est une bijection



- Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle **l'image du nombre complexe dans le plan** $(\mathcal{P})$, et l'application
- Le complexe z s'appelle **l'affixe vecteur $\vec{u}$** on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit $z_{\vec{u}} = a + ib$
- Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle **un plan complexe**
- L'axe $(O,\overrightarrow{e_1})$ s'appelle l'axe des réels
- L'axe $(O,\overrightarrow{e_2})$ s'appelle l'axe imaginaire

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$

2) Les opérations sur les affixes.

Propriété :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$; M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ; On a :

- $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$
- $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$
- $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$

Preuve : En exercice.

Propriété :

- Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \frac{z_A+z_B}{2}$.
- Si $G = Bar\{(A_k, \alpha_k)_{1\le k\le n}\}$ et $z_k = aff(A_k)$ alors : $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}$
  - Cas particuliers 2 points pondérés : $G = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$
  - Cas particuliers 3 points pondérés : $G = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma)\}$ on a : $z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$

Preuve : En exercice.

3) Condition complexe d'alignement de 3 points

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C

On sait que :

$$\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ sont alignés} &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})(\overrightarrow{AC} = \alpha\, \overrightarrow{AB}) \\ &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})(z_C - z_A = \alpha(z_B - z_A)) \\ &\Leftrightarrow (\exists\alpha \in \mathbb{R})\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \alpha\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Propriété :

Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C ; les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

Exercice :

Soit les points $A_{(2-3i)}$; $B_{(1+i)}$ et $C_{(1+2i)}$.

1- Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2- Déterminer l'affixe de I, milieu de $[AB]$.

3- Déterminer le barycentre de $\{(A, 2); (B, -1), (C, 3)\}$

4- Déterminer l'affixe du point D pour que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

IV) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

Définition :

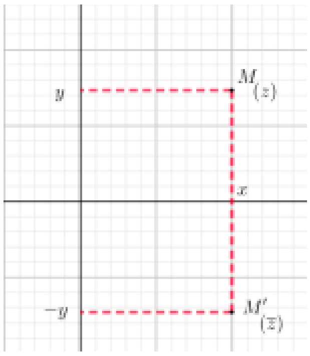
Soit le nombre complexe $z = a + ib$ (a et b sont des réels) ; le nombre complexe qu'on note $\bar{z}$ et qui est égale à $\bar{z} = a - ib$ s'appelle le conjugué du nombre complexe z

Exemple :

- $z_1 = 3 - 2i$ son conjugué est $\overline{z_1} = 3 + 2i$
- $z_2 = 3i + 1$ son conjugué est $\overline{z_2} = -3i + 1$
- $z_3 = 3 - \sqrt{2}$ son conjugué est $\overline{z_3} = 3 - \sqrt{2}$

Propriété : (Règles de calculs)

- $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- $\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$
- $\overline{(\bar{z})} = z$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$



Propriété :

- $z + \bar{z} = 2Re(z)$
- $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- Si $M_{(z)}$ est l'image de z et $M'_{(\bar{z})}$ alors M et M' sont symétrique par rapport à l'axe des réels.

Exercice :

❶ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z - 3\,\bar{z} + 1 + 2i = 0$
2. $z + (1-i)\ \bar{z} + 3 - 2i = 0$
3. $(3+i)z\ + \bar{z} = \frac{1}{i}$

❷ Déterminer les ensembles suivants :

1. $(\Gamma_1) = \{M_{(z)}\ /\ \frac{z-2i}{z+i}\ \in \mathbb{R}\}$
2. $(\Gamma_2) = \{M_{(z)}\ /\ \frac{z-2i}{z+i}\ \in i\mathbb{R}\}$

V) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1) Définition et applications

Définition :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, le réel positif $\sqrt{x^2+y^2}$ s'appelle le module du nombre complexe z et on le note $|z|$

Propriété :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ; on a $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\,\bar{z}}$

Preuve : en exercice

Exercice :

❶ Déterminer les modules des complexes suivants :

1. $z_1 = 3 + \sqrt{2}\,i$
2. $z_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,i$
3. $z_3 = \frac{1}{1+i}$
4. $z_4 = x$ où $x \in \mathbb{R}$

❷ Ecrire sous la forme algébrique les complexes suivants puis déterminer leurs modules :

1. $u_1 = \frac{2+5i}{1+3i}$
2. $u_2 = \frac{1+i}{i-3\sqrt{2}}$
3. $u_3 = (2-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{2}+i)$

❸ Déterminer l'ensemble des points $M_{(z)}$ tels que : $M_{(z)}\ N_{(\bar{z})}$ et $Q_{\left(\frac{1}{z}\right)}$ soit alignés.

2) Règle de calculs

Propriétés :

Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :

- $|z|^2 = z\,\bar{z}$
- $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$
- $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
- $|z.z'| = |z|.|z'|$
- $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ où $z' \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$

Remarque :

- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $\left|\sum_{k=0}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |z_k|$

Propriété :

Pour tous points A et B d'affixes respectifs z_A et z_B on a : $AB = |z_A - z_B|$

Applications :

Déterminer les ensembles suivants :

① $(\Gamma_1) = \{M_{(z)} / \ |z + 3 - i| = 4\}$
② $(\Gamma_2) = \{M_{(z)} / \ |-z - \sqrt{3} - 2i| = 3\}$
③ $(\Gamma_3) = \{M_{(z)} / \ |z - 1| = |z - 1 - 2i|\}$
④ $(\Gamma_4) = \{M_{(z)} / \ |z - 1| = |2i - z|\}$
⑤$(\Gamma_2) = \{M_{(z)} / \ |2iz - 1| = |2z + 4 - 6i|\}$

VI) FORME TRIGONOMETRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

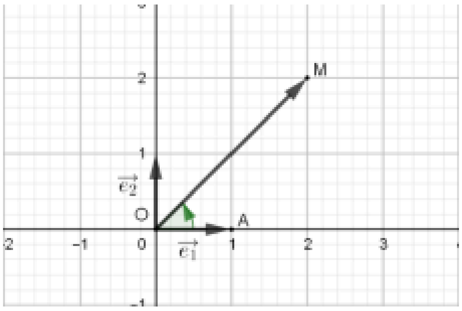
1) L'argument d'un nombre complexe non nul.

Définition :

Le plan complexe est menu d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$
Soit z un nombre complexe non nul et $M_{(z)}$ son image. On appelle **argument du nombre complexe z** une mesure (en radian) de l'angle $(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}_{(z)}})$, On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$

Exemples :

- $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi\ [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\boldsymbol{\pi}]$
- $\arg(2 + 2i) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ (figure ci-contre)



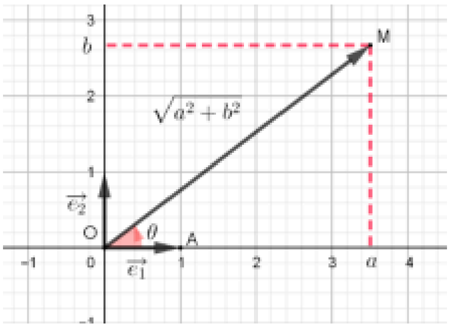
2) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z = a + ib$ un complexe non nul, on a donc $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ et en suite :

$z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$; Or : si $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$

alors : $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

et finalement $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$



Propriété :

Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme $z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$; où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$
Cette écriture s'appelle **la forme trigonométrique du nombre complexe non nul z**

Exercices :

Donner la forme trigonométrique du nombre complexe z dans les cas suivants :

1. $z = 3 + 3i$
2. $z = \sqrt{3} - i$
3. $z = -4 + 4i$
4. $z = -2 - 2\sqrt{3}\, i$
5. $z = 7$
6. $z = -12$
7. $z = \frac{1}{2i}$

3) Règles de calculs sur les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $\arg(z') \equiv \theta'\ [2\pi]$

On donc :

$$z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta) \text{ et } z' = |z'|(cos\theta' + i\ sin\theta')$$

et par suite :

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(cos\theta + i\ sin\theta)(cos\theta' + i\ sin\theta') \\ &= |z||z'|(cos\theta cos\theta' + i\ cos\theta\ sin\theta' + i\ sin\theta\ cos\theta - sin\theta\ sin\theta') \\ &= |z||z'|(cos\theta cos\theta' - sin\theta\ sin\theta' + i\ (cos\theta\ sin\theta' + sin\theta\ cos\theta)) \\ &= |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')) \end{aligned}$$

(en utilisant les formules de transformations)

Propriété principale :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls, on a : $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$

Propriété Règles de calculs pour les arguments :

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls :

- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$

Preuves (en exercice)

Notations :

Soit z un nombre complexe dont la forme trigonométrique est : $z = r\ (cos\theta + i\ sin\theta)$ c'est-à-dire $\begin{cases} |z| = r \\ \arg(z) \equiv \theta\ [2\pi] \end{cases}$ on écrit : $z = [r, \theta]$

Règles de calculs

- $[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$
- $\frac{1}{[r,\theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
- $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$
- $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
- $\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
- $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$

Ces propriétés ne sont que l'assemblage des propriétés sur les calculs des modules et les calculs des arguments.

4) Applications :

Exercice 1 :

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z et placer le point $M_{(z)}$ dans le plan complexe muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{u}, \vec{v})$ dans les cas suivants :

1. $z = 2 + 2i$
2. $z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$
3. $z = -5 - 5i$
4. $z = -6 + 6\sqrt{3}i$

Exercice 2 :

Déterminer le module et l'argument du nombre complexe z dans les cas suivants :

1. $z = (3 - 3i)^4$
2. $z = \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)(-1 + i)$
3. $z = \frac{4-4i}{6-6\sqrt{3}i}$

Exercice 3 :

1. Ecrivez les nombres complexe $u = -2 - 2i$ et $v = 3 - 3\sqrt{3}i$ sous leurs formes trigonométriques.
2. En déduire une écriture trigonométrique des complexes :
   a) $z = uv$
   b) $z = \frac{u}{v}$
   c) $z = u^3 v^5$
3. Ecrire le complexe $z = \frac{u}{v}$ sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

5) Les formes trigonométriques des racines carrées

Définition

On appelle **racine carrée d'un complexe z** tout complexe u tel que $u^2 = z$

Remarque

Un complexe non nul admet deux racines carrées.

Preuve d'une propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul et $u = [\rho, \alpha]$ une racine de z donc $u^2 = r$ ce que se traduit par :

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{r} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{2} [2\pi] \ \ ou \ \alpha \equiv \frac{\theta}{2} + \pi \ [2\pi] \end{cases}$$

Propriété :

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r, \theta]$ sont les complexes :
$u_1 = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2}\right]$ et $u_2 = \left[\sqrt{r}\ ,\ \frac{\theta}{2} + \pi\right]$

Exercice :

Soit le complexe $u = (\sqrt{3} - 1) + i(1 + \sqrt{3})$

1. Calculer u^2 puis déterminer le forme trigonométrique de u^2
2. En déduire la forme trigonométrique de u

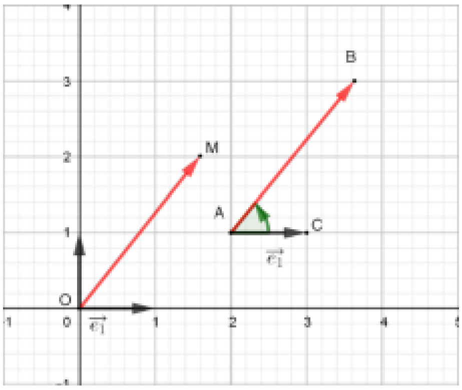
VI) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES

1) Angles orientés et argument.

On sait que si le nombre complexe z est non nul alors $\overline{(\vec{e_1}, \overrightarrow{OM_{(z)}})} \equiv \arg(z) \ [2\pi]$

- Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et $'$, on a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{OM}, \vec{e_1}}\right) + \left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right) + \left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM'}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right) \quad [2\pi]$$



- Soient A et B deux points dans le plan complexe d'affixes respectifs a et b, on sait qu'il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ et M aura pour affixe le complexe $(b-a)$

Donc : $\left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right) \ [2\pi]$

$$\equiv \arg(b-a) \quad [2\pi]$$

- Soient A, B et C trois points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b et , on a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \vec{e_1}}\right) + \left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}}\right) + \left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{AC}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv -\arg(b-a) + \arg(c-a) \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

- Soient , B , C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs a, b, c et d , on a :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CD}}\right) \quad [2\pi]$$
$$\equiv \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}}\right) + \pi \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{d-c}{a-c}\right) \times (-1)\right] \quad [2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \quad [2\pi]$$

$$\boxed{(\overline{\vec{u}, \vec{v}}) \equiv (\overline{-\vec{u}, \vec{v}}) + \pi \quad [2\pi]}$$

Propriété :

- Soit z et z' deux complexes non nuls d'images respectives M et $'$, on a : $\left(\overline{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv arg\left(\frac{z'}{z}\right) [2\pi]$
- $\left(\overline{\vec{e_1}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(b-a) \ [2\pi]$
- $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \ [2\pi]$
- $\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \ [2\pi]$

Exercice :

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B et C d'affixes respectifs : $z_1 = -\sqrt{2}$ ، $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = 1 - i$

1. Placer dans le repère $\mathcal{R}$ les points A, B et C
2. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ et déterminer une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}}\right)$.
3. Montrer que la droite (OA) est la médiatrice du segment $[BC]$ et en déduire que : $\left(\overline{\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$
4. Ecrivez le nombre $\frac{z_1 - z_2}{z_1}$ sous sa forme algébrique puis en déduire $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

2) Applications

2.1 Alignement de 3 points.

Corolaire :

Trois points $A_{(a)}, B_{(b)}$ et $C_{(c)}$ sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.

Preuve :

On sait que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ [2\pi]$ et que $\frac{c-a}{b-a} = r(cos\theta + i\ sin\theta)$ où $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \theta\ [2\pi]$ et $r = \left|\frac{c-a}{b-a}\right|$

$A_{(a)}, B_{(b)}$ et $C_{(c)}$ sont alignés $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv 0\ [2\pi]\ \ ou\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = r$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -r$

$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$

Exercice :

1- Vérifier que les points $A_{(5+3i)}$, $B_{(2+i)}$ et $C_{(-1-i)}$ sont alignés

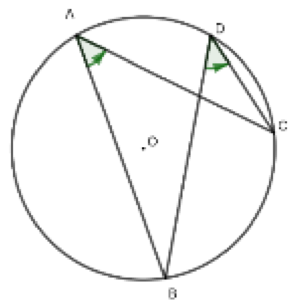
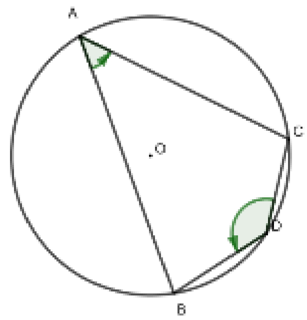
2- Les points $M_{(-2+2i)}$, $N_{(2-i)}$ et $N_{(1-i)}$ sont alignés.

2.2 Cocyclicité de 4 points.

Rappelle :

Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C) si et seulement si

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\quad [2\pi]$ ou $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\quad [2\pi]$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)\quad [2\pi]$	$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \pi - \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\quad [2\pi]$
	
Ceci se traduit par : $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right)\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) - arg\left(\frac{c-d}{b-d}\right) \equiv 0\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right)\right] \equiv 0\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*+}$	Ceci se traduit par : $arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \pi - arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right)\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) + arg\left(\frac{b-d}{c-d}\right) - \pi \equiv 0\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow arg\left[\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \times (-1)\right] \equiv 0\ \ [2\pi]$ $\Leftrightarrow \left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^{*-}$

Théorème:

Soit $A_{(a)}, B_{(b)}, C_{(c)}$ et $D_{(d)}$ quatre points dans le plan complexe.

Les points $A_{(a)}, B_{(b)}, C_{(c)}$ et $D_{(d)}$ sont **cocycliques si** et seulement si : $\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \times \left(\frac{b-d}{c-d}\right) \in \mathbb{R}^*$

Exercice :

1- Montrer que les points : $A_{(i)}, B_{(2+3i)}, C_{(6+i)}$ et $D_{(4-3i)}$

2- Montrer que $\Omega_{(3)}$ est le centre du cercle qui circonscrit le quadrilatère $ABCD$