

Exercices : fonctions exponentielles

PROF : ATMANI NAJIB

2BAC SM

TD : FONCTIONS EXPONENTIELLES

Exercice1 : Résoudre les équations

Et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $\exp\left(\frac{x+5}{2x+3}\right) = \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$ 2) $\exp(2x+1) \leq \exp\left(\frac{6}{x}\right)$

Exercice2 : Résoudre les équations et

inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

1) $e^{1-x} \times e^{2x} = e$ 2) $\frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1}$
3) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$ 4) $e^{x^2} \cdot (e^x)^3 = (e^{-x})^5 \cdot e^{-7}$
5) $e^{2x-3} - (e+1)e^{x-2} + 1 < 0$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x + 4}$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 e^{-\sqrt{-x}}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

Exercice4 : Déterminer les dérivées des fonctions

suivantes : 1) $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$
2) $g(x) = e^{-2x^2} - 3e^{3x+1}$ 3) $h(x) = e^{\frac{x+1}{-x+3}}$
4) $f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

Exercice5 : Déterminer les primitives des

fonctions suivantes : 1) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
2) $g(x) = (e^x)^2$ 3) $h(x) = \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$

Exercice6 : Déterminer une primitive des

fonctions suivantes :

1) $I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x}$

2) $I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$

3) $I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3$

4) $I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x}$

5) $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad I =]0; +\infty[$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par :

$f(x) = (x-1)e^x$

- 1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 2) Etudier les branches infinies de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
- 3) Etudier la concavité de la courbe C_f
- 4) Construire la courbe C_f .

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$

- 1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

- 2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$

- 4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f
Et étudier la position de la courbe C_f avec les asymptotes obliques

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par :

$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$

- 1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) \frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$

3) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

4) montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+) f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

6) Etudier les branches infinies de la courbe C_f Au voisinage de $+\infty$

7)calculer : $f(2\ln 2)$ et construire la courbe C_f .

Exercice10 :: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{e^{-x} - e^{-2x}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

3)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) construire la courbe C_f .

Exercice11 : Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

1)déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

3) montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

4) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Exercice12 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$ et soit (C) la courbe

De f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2cm$

1)a)montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et interpréter

géométriquement le résultat

b) montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2)a)vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

b) en déduire la droite (D) d'équation : $y = x + 1$

est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

c) étudier la position de la courbe C_f avec la droite (D)

3)a) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$

b) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

c) Etudier la concavité de C_f

d) montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un point à déterminer

4) Construire la courbe C_f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a)montrer que f admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J que l'on déterminera

b) déterminer : $f^{-1}(x) \quad \forall x \in J$

Exercice13 :

Partie 1 : Considérons la fonction f définie sur \mathbb{R}_+

par : $f(x) = (x + 2)e^{\frac{-2}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

2) Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3) Déterminer la limite en $+\infty$

4) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f .

5) a) Montrer que $(\forall t > 0) 0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}$

b) En déduire que : $(\forall x > 0)$

$$\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$$

c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

6) Construire la courbe C_f .

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f_n(x) = (x + 2n)e^{\frac{-2}{x}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

Où $n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

b) Déterminer la limite en $+\infty$

c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n .

2) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$

admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$

3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$$

b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)_n = 0$

Exercice14 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) 5^x = 15 \quad 2) 3^{2x} \geq 5^{1-x} \quad 3) 7^{x+1} - 7^{-x} < 6$$

Exercice15 : Résoudre les équations et inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

$$1) 2^{x+1} = 8^x \quad 2) 3^x = 12 \quad 3) 5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0$$

$$4) 100^x + 40 = 14 \times 10^x$$

$$5) 2^{x-1} > 4^x \quad 5) (0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1}$$

Exercice16: Déterminer les primitives de la fonction suivante : $f(x) = 3^{x-2}$

Exercice17: Soit La fonction f définie par :

$$f(x) = 4^x - 2^{x+1} \quad 1) \text{déterminer } D_f$$

2) calculer les limites aux bornes de D_f

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Etudier les branches infinies de la courbe C_f

5) construire la courbe C_f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 18: Soit La fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow x^x, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1) Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.

2) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.

3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

5) Tracer la courbe C_f .

6) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $f(x) = x$

7) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$

et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.

a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.

c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

Exercice 19 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\ln x)^n}{x^2} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0$$

et (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1 .

2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en point d'abscisse 1.

3. Construire la courbe (C_1) et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de :

$$f_2(x) - f_1(x)$$

b) En déduire les positions relatives des deux courbes (C_1) et (C_2) ; puis construire (C_2)

6. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n .

a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e} \right)^n$

b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$

c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}}))$

d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (u_n \leq \frac{1}{e} \frac{1}{2^n})$

Et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 20 : Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction : $t \rightarrow e^{-t}$;

montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\exists \theta \in \mathbb{R}^{*+}) (e^\theta = \frac{x}{1 - e^{-x}})$

2. En déduire que : $(\forall x > 0) (1 - x < e^{-x})$ et que

$$(\forall x > 0) (1 + x < e^x)$$

3. En déduire que : $(\forall x > 0) (0 < \ln \left(\frac{xe^x}{e^x - 1} \right) < x)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$

$$\text{Par : } f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ Si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1$$

1) Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

3) a) Montrer que $(\forall x > 0)$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2} \right)$$

b) Montrer que $(\forall x > 0) \left(\frac{f(x) - 1}{x} = \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} \cdot f(x) \right)$

c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

4) a) Montrer que : $(\forall x > 0) \left(f'(x) = \frac{e^x (e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2} \right)$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f .

c) Construire la courbe C_f .

d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ Vers $J = f([0, +\infty[)$.

Partie 3 : Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in]0, +\infty[\text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) (u_{n+1} = \ln(f(u_n)))$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,

2) Montrer que la suite $(u_n)_n$ strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

3) a) Montrer que l'équation $\ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

