Exponentielle exercices corrigés

Fonction exponentielle **Exercices corrigés**

1. 1. Fesic 1996, exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$ et C sa courbe représentative.

a. f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\left[\dfrac{e^3}{27}\,;+\infty\right[$.

b. La droite (Δ) d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C.

c. C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse $x=3$.

d. La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=-2ex-e$.

Correction

a. **Faux** : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}$, or pour $x\in[3,+\infty[$, $f'(x)\ge 0$ car $e^x>0$ et $x^4>0$ et pour $x\in]0,3[$ $f'(x)<0$. f n'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$ et elle ne réalise donc pas une bijection.

b. **Faux** : Si la droite Δ d'équation $x=3$ est axe de symétrie de la courbe C alors f doit être paire dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$ avec $I(3,0)$. Posons $\begin{cases} y=Y \\ x=X+3\end{cases}$ alors $Y=f(X)=\dfrac{e^{X+3}}{(X+3)^3}\neq f(-X)=\dfrac{e^{-X+3}}{(-X+3)^3}$. Donc f n'est pas paire dans le repère $(I\,;\,\vec{i},\vec{j})$ avec $I(3, 0)$.

c. **Vrai :** $f'(x)=\dfrac{e^x(x-3)}{x^4}=0$ pour $x=3$ car $e^x>0$ donc C admet une unique tangente parallèle à l'axe (Ox) et elle est obtenue au point d'abscisse $x=3$.

d. **Faux** : La tangente à C au point d'abscisse 1 a pour équation : $y=f'(1)\cdot(x-1)+f(1)=-2ex+3e$.

1. 2. Fesic 1996, exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}-\dfrac{x}{2}$ et C sa courbe représentative.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b. La droite D d'équation $y=-\frac{x}{2}$ est asymptote à C.

c. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. L'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Correction

a. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}-\frac{x}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x(x^2+1)}-\frac{x}{2}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x(x^2+1)}=0$.

b. **Vrai :** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(-\frac{x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+1}=0$ donc la droite D d'équation $y=-\frac{x}{2}$ est asymptote à C en $+\infty$ et elle est située au dessus de C car $\frac{e^{-x}}{x^2+1}>0$.

c. **Vrai** : La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$;

$f'(x)=\frac{-e^{-x}(x^2+1)-e^{-x}(2x)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}$ soit $f'(x)=\frac{-e^{-x}(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}=\frac{-e^{-x}(x+1)^2}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{2}$ qui est toujours strictement négative car somme de deux termes strictement négatifs. f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

d. **Vrai :** La fonction f est dérivable et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, $f(0)=1$ positif et $f(1)=\frac{1}{2e}-\frac{1}{2}$ donc négatif. f est donc bijective et il existe un unique réel $\alpha\in\left]0\,;1\right[$ solution de l'équation $f(x)=0$.

1. 3. Fesic 1996, exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$ et C sa courbe représentative.

a. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel on a : $f'(x)=\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

c. L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution réelle.

d. La droite D d'équation $y=1+x$ est asymptote à C.

Correction

a. **Faux** : $f'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}<0$.

b. **Vrai** : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)=0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ et $\ln 1=0$.

c. **Vrai** : D'après a. $f'(x)<0$ donc f est strictement décroissante et d'après b) f tend vers 0 en $-\infty$ donc $f<0$ sur $\mathbb{R}$ et l'équation n'a pas de solution réelle dans $I=\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

d. **Faux** : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}\cdot\left(\frac{1}{e^x}+1\right)}=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln e^x(e^{-x}+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln(e^{-x}+1)$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(1+e^x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x-\ln(e^{-x}+1) = -\infty$ et pour finir $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(1+x) = -\infty$.

Conclusion : la droite D d'équation $y=x+1$ n'est pas asymptote à $f(x)$ mais la droite d'équation $y=1-x$ est asymptote à $f(x)$.

1. 4. Fesic 2000, exercice 6

Pour tout réel m, on considère l'équation (E_m) : $e^{2x}-2e^x-m=0$.

a. L'unique valeur de m pour laquelle $x = 0$ est solution de l'équation (E_m) est $m = 0$.

b. Pour toute valeur de m, l'équation (E_m) admet au moins une solution.

c. Si $-1<m<0$, l'équation (E_m) a deux solutions positives.

d. Si $m>0$, l'équation (E_m) a une unique solution.

Correction

a. Faux : Si $x = 0$ alors l'équation (E_m) s'écrit $e^0-2e^0-m=0$ soit $m=-1$.

b. Faux : Posons $X=e^x>0$, on a alors l'équation $X^2-2X-m=0$ où $\Delta=4+4m$.

On obtient au moins une solution pour $m\geq -1$ telles que $X_1=\dfrac{2+2\sqrt{1+m}}{2}=1+\sqrt{1+m}$ et $X_2=1-\sqrt{1+m}$.

Si $m< -1$ il n'y a pas de solution.

c. Faux : X_1 est évidemment positive. Etudions le signe de X_2 : $1-\sqrt{1+m}>0 \Leftrightarrow 1>\sqrt{1+m} \Leftrightarrow m<0$.

Donc pour $-1<m<0$ il y a deux solutions X_1 et X_2 positives et on obtient $x_1=\ln\left(1+\sqrt{1+m}\right)>\ln 1$ soit $x_1>0$ et $x_2=\ln\left(1-\sqrt{1+m}\right)<\ln 1$ soit $x_2<0$.

d. Vrai : Si $m>0$, $1-\sqrt{1+m}<0$ donc $X_2=e^x>0$ n'a pas de solutions et $1+\sqrt{1+m}>0$ par conséquent $x_1=\ln\left(1+\sqrt{1+m}\right)$.

1. 5. Fesic 2000, exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)e^{-x}$ et g définie par : $g(x) = x^3-x^2-x-1$.

Répondre par vrai ou faux en justifiant sa réponse.

A. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

B. la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe représentative de f quand f tend vers $+\infty$.

C. La fonction dérivée de f et la fonction g ont le même signe.

D. La fonction f atteint un minimum pour $x = 1$.

Correction

A : FAUX

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{xe^x}-\dfrac{x}{e^x}\right)=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{xe^x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ (théorème).

B : VRAI

La réponse est dans la question précédente ; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, par définition, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.

C : VRAI

$f(x)=\left(\dfrac{1-x^2}{x}\right)e^{-x}=\dfrac{1}{x}e^{-x}-xe^{-x}$; f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}e^{-x}-\frac{1}{x}e^{-x}-e^{-x}+xe^{-x}=\frac{e^{-x}}{x^2}\left(x^3-x^2-x-1\right)=\frac{e^{-x}}{x^2}g(x)$.

Dans la mesure où on compare f et g sur l'intersection de leur domaine de définition ($\mathbb{R}^*+$), les deux fonctions ont le même signe.

D : FAUX

La fonction f' ne s'annule pas en 1, elle n'admet donc pas de minimum pour $x = 1$.

Remarque : $f(1) = 0$, la courbe coupe donc l'asymptote en 1, … mais aussi en -1.

1. 6. Banque 2004

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2,1e^{x}+1,1x+1,6$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $[-5 ; 4] \times [-4 ; 4]$. Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ؟

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ ؟

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 > 0$ (on pourra poser $e^{x} = X$ pour résoudre).

b. Etudier les variations de la fonction f.

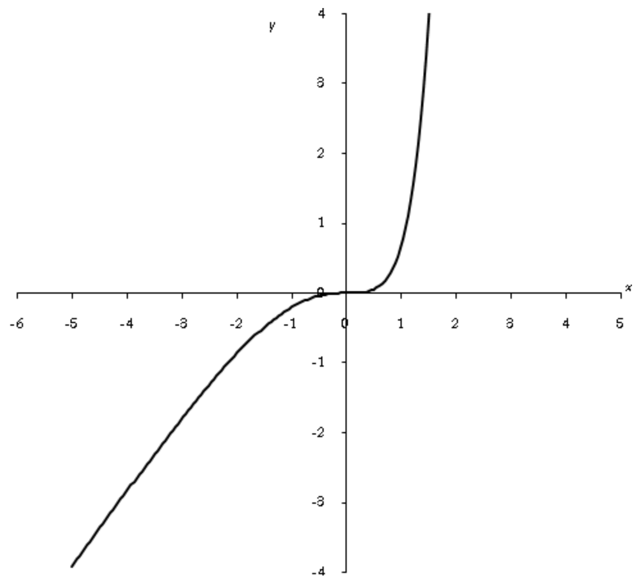
c. Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,05 ; 0,15]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.

Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ؟

Correction

1.



2. a. f semble croissante.

b. L'équation $f(x) = 0$ semble avoir une seule solution en 0.

3. a. $e^{2x} - 2,1e^{x} + 1,1 > 0$ donne $X^2-2,1X+1,1>0$; cherchons les racines : $\Delta=2,1^2-4,4=0,01=(0,1)^2$

d'où les racines $X_1=\dfrac{2,1+0,1}{2}=1,1$, $X_1=\dfrac{2,1-0,1}{2}=1$; on peut alors factoriser :

$$X^2-2,1X+1,1>0 \Leftrightarrow (X-1,1)(X-1)>0 \Leftrightarrow (e^x-1,1)(e^x-1)>0 .$$

Les solutions sont alors $e^x \in]-\infty\,;1[\cup]1,1\,;+\infty[\Leftrightarrow e^x \in]0\,;1[\cup]1,1\,;+\infty[\Leftrightarrow x\in]-\infty\,;0[\cup]\ln(1,1)\,;+\infty[$.

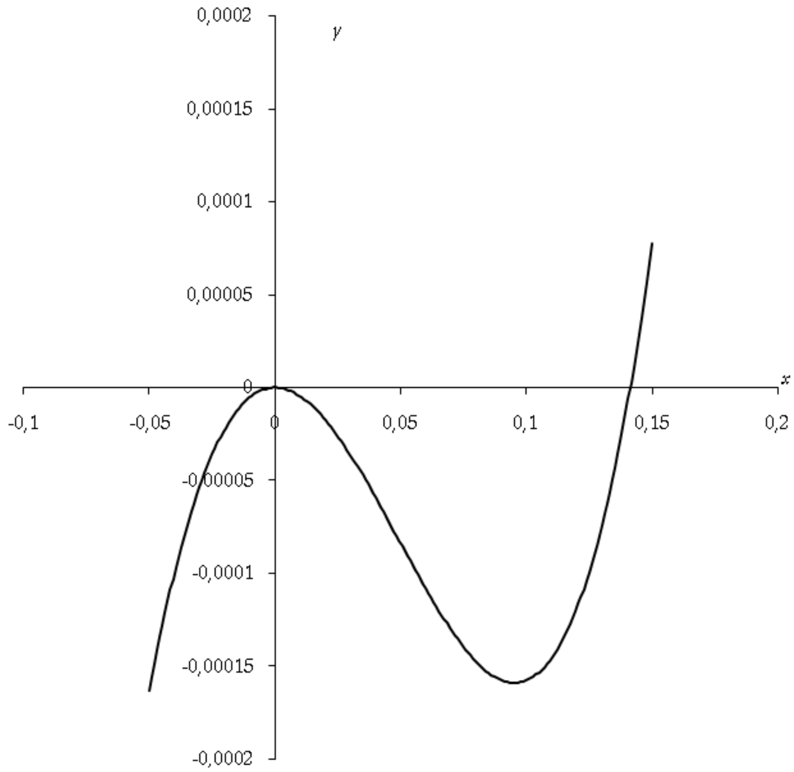
b. $f'(x)=\dfrac{1}{2}2e^{2x}-2,1e^x+1,1=e^{2x}-2,1e^x+1,1$. Le signe de f' est celui calculé précédemment.

c. $f(0)=\dfrac{1}{2}e^0-2,1e^0+1,1.0+1,6=0,5-2,1+1,6=0$;

$f(\ln(1,1))=\dfrac{1}{2}e^{2\ln(1,1)}-2,1e^{\ln(1,1)}+1,1\ln(1,1)+1,6\approx -0,0001588$.

Comme $f(\ln(1,1))<0$, f s'annule en 0 puis une seconde fois pour une valeur de x supérieure à ln(1,1). Il y a donc deux solutions.

4. Il suffit de prendre $y_{\min}<f(\ln(1,1))$ et $y_{\max}>0$ comme ci-dessous. Par exemple $[-0,0002\,;0,0002]$ convient très bien.



1. 7. Expo + aire, Amérique du Nord 2005

5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)$.

Sa courbe représentative C est tracée dans le repère orthonormal ci-dessous (unité graphique 2 cm).

1. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.

b. Montrer que la droite Δ d'équation $y=2x-2$ est asymptote à C .

c. Étudier la position relative de C et Δ .

2. a. Calculer $f'(x)$ etmontrer que $f'(x)=xe^{-x}+2\left(1-e^{-x}\right)$.

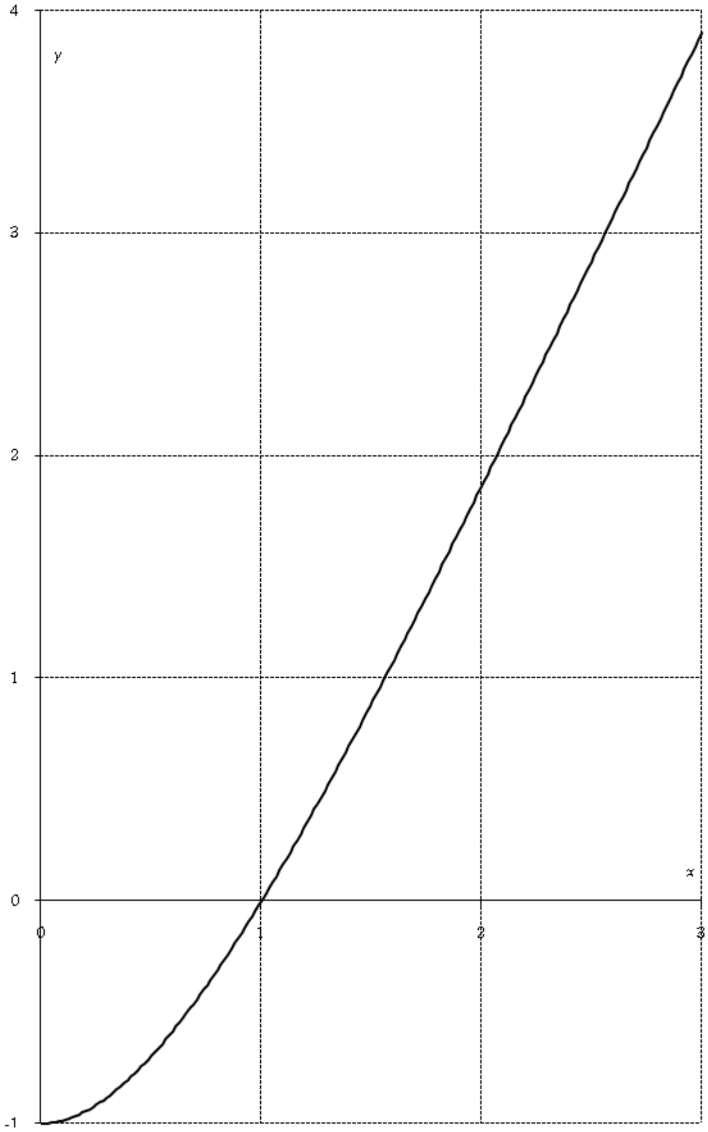
b. En déduire que, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)>0$.

c. Préciser la valeur de $f'(0)$, puis établir le tableau de variations de f.

3. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'aire, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

4. a. Déterminer le point A de C où la tangente à C est parallèle à Δ.

b. Calculer la distance, exprimée en cm, du point A à la droite Δ.



Correction

1. a. En $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ et $2-e^{-x}$ tend vers 2 car e^{-x} tend vers 0 ; f a pour limite $+\infty$.

b. $f(x)-(2x-2)=(x-1)\left(2-e^{-x}\right)-2(x-1)=(x-1)(-e^{-x})$: avec les croissances comparées, e^{-x} emmène tout le monde vers 0, la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est bien asymptote à C.

c. Signe de $f(x)-(2x-2)=-(x-1)e^{-x}$: lorsque $x\le 1$ c'est positif, donc C est au-dessus de Δ ; lorsque $x\ge 1$ c'est négatif, donc C est en dessous de Δ.

3. a. $f'(x)=(x-1)'\left(2-e^{-x}\right)+(x-1)\left(2-e^{-x}\right)'=2-e^{-x}+(x-1)e^{-x}=2-2e^{-x}+xe^{-x}$ d'où

$f'(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$.

b. Comme x est positif, $xe^{-x}>0$ et $x>0\Rightarrow -x<0\Rightarrow e^{-x}<e^0=1\Rightarrow e^{-x}-1<0\Rightarrow 1-e^{-x}>0$ donc f' est positive.

c. $f'(0)=0+2(1-1)=0$.

2. Comme $x\geq 1$ il faut calculer $-\int_1^3 -(x-1)e^{-x}dx$: on pose $\begin{cases}u=x-1\\ v'=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u'=1\\ v=-e^{-x}\end{cases}$ d'où

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}dx=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^3-\int_1^3 -e^{-x}dx=-2e^{-3}-\left[e^{-x}\right]_1^3=-2e^{-3}-\left[e^{-3}-e^{-1}\right]=e^{-1}-3e^{-3}.$$

Comme l'unité d'aire est de 2 cm x 2 cm, soit 4 cm^2, on a donc $\left(e^{-1}-3e^{-3}\right)4\approx 0,87$ cm^2.

3. a. La tangente à C est parallèle à Δ lorsque $f'(x)=2$: mêmes coefficients directeurs ; on a donc $f'(x)=xe^{-x}+2-2e^{-x}=2\Leftrightarrow xe^{-x}-2e^{-x}=0\Leftrightarrow (x-2)e^{-x}=0\Rightarrow x=2$. Le point A a pour coordonnées 2 et $f(2)=(2-1)\left(2-e^{-2}\right)=2-e^{-2}$.

b. La distance du point A à la droite $ax+by+c=0$ est $\dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; ici Δ a pour équation cartésienne $2x-y-2=0$ d'où notre distance est $\dfrac{|2.2-(2-e^{-2})-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$, soit en cm : $2\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$.

x	0	$+\infty$
f'	0 +	
f	-1 ↗	$+\infty$

1. 8. Basique, N. Calédonie, nov 2004

5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$. On note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1. Etudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de g.

2. Justifier que pour tout x, $e^x-x>0$.

Partie B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f.

b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

b. A l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe (C).

Correction

Partie A

1. $g'(x)=e^x-1$ est positive lorsque $x\geq 0$; $g(0)=1-0-1=0$: comme g est décroissante avant 0 et croissante après, g est toujours positive.

2. Comme $g(x)\geq 0$, on a $e^x-x\geq 1\Rightarrow e^x-x>0$ (ceci montre que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Partie B

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\dfrac{1}{+\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-1}=\dfrac{1}{0-1}=-1$.

b. On a une asymptote horizontale en $-\infty$: $y=-1$ et une autre en $+\infty$: $y=0$.

2. a. $f'(x)=\dfrac{1(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\dfrac{e^x-x-xe^x+x}{(e^x-x)^2}=\dfrac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}$.

b. f' est du signe de $1-x$.

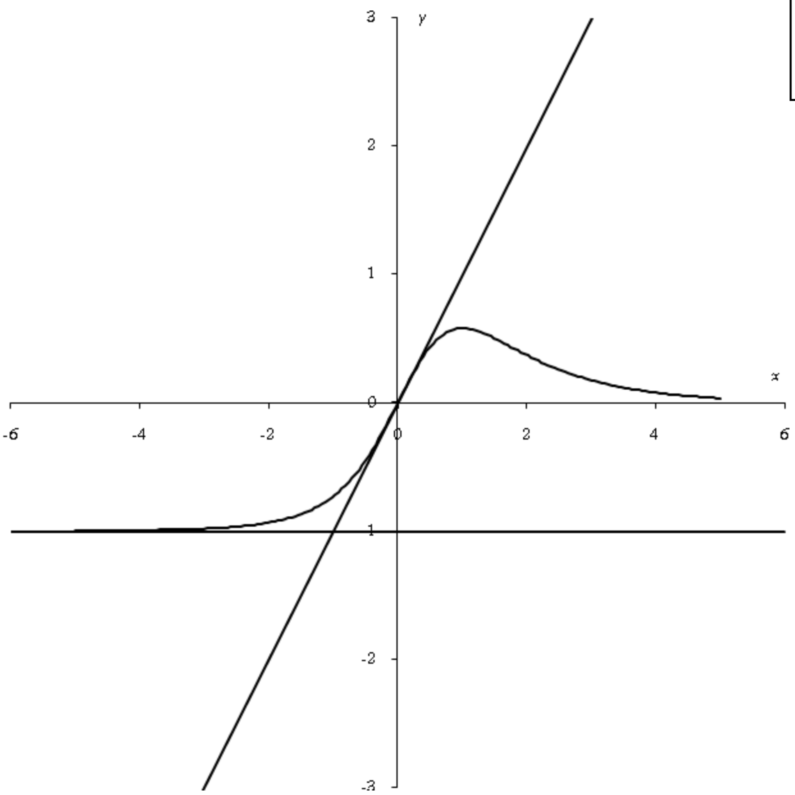
3. a. $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$.

b. $f(x)-x=\dfrac{x}{e^x-x}-x=\dfrac{x-xe^x+x^2}{e^x-x}=\dfrac{-x(e^x-x-1)}{e^x-x}=\dfrac{-xg(x)}{e^x-x}$.

Comme g est positive, ainsi que e^x-x, $f(x)-x$ est du signe de $-x$, soit positif avant 0 (C est au-dessus de T), négatif après (C est en dessous de T).

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4.



1. 9. Basiques

Exercice 1

Soient f et g les fonctions définies de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x+\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x+1}{e^x-1} \text{ et } g(x)=2e^{2x}-5e^x+2.$$

a. Démontrer que $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$

b. Factoriser $g(x)$.

c. Déterminer le signe de la dérivée de f.

<u>Correction</u>

a. $2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x+\frac{e^x-1+2}{2(e^x-1)}=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$

$2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}=2+\frac{-e^x+1+2e^x}{2(e^x-1)}=2x+\frac{1}{2}.\frac{e^x+1}{e^x-1}=f(x)$;

b. $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2,\ X=e^x$, $\Delta=5^2-4\times2\times2=25-16=9=3^2$, $X=\frac{5\pm3}{4}$, $X_1=e^{x1}=2$, $X_2=e^{x2}=\frac{1}{2}$,

$g(x)=2(e^x-2)(e^x-\frac{1}{2})$.

c. $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$, $f'(x)=2-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^{2x}-2e^x+1)-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$ est donc du signe de $g(x)$ et f est donc négative entre ln 2 et – ln 2, positive ailleurs.

<u>Exercice 2</u>

Démontrer que quel que soit le réel x on a : $\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x$.

<u>Correction</u>

$\ln(e^x+1)-\ln(1+e^{-x})=x \Leftrightarrow \ln\frac{e^x+1}{1+e^{-x}}=x \Leftrightarrow \frac{e^x+1}{1+e^{-x}}=e^x \Leftrightarrow e^x+1=e^x(1+e^{-x}) \Leftrightarrow e^x+1=e^x+1$.

<u>Exercice 3</u>

Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} 2^x-3^y=5 \\ 3\times2^x+3^y=24 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \ln x+\ln y=-2\ln 4 \\ e^x e^y=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases}$

<u>Correction</u>

$\begin{cases} 2^x-3^y=-1 \\ 3\times2^x+3^y=33 \end{cases} \Rightarrow 4\times2^x=32, 2^x=8, x=3$, $\begin{cases} x=3 \\ 8-3^y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3^y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$, S = {(3 ;2)}.

$\begin{cases} \ln x+\ln y=-2\ln 4 \\ e^x.e^y=\frac{1}{\sqrt{e}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln xy=\ln 4^{-2} \\ e^{x+y}=e^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$, soit $\begin{cases} xy=\frac{1}{16} \\ x+y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Soit à résoudre l'équation : $X^2-SX+P=0$, $X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{16}=0 \Leftrightarrow (X+\frac{1}{4})^2=0 \Leftrightarrow X=-\frac{1}{4}=x=y$.

Or, bien évidemment, les valeurs négatives sont exclues car ln n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-$ donc S = ∅.

<u>1. 10. Une fonction</u>

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(x+1)^2e^{-x}$.

Soit C la représentation graphique de la fonction g dans le repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que $g'(x)$ est du signe de $(1 - x^2)$. En déduire les variations de g.

2. Montrer que :

a. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

b. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et préciser l'asymptote à C correspondante.

3. Tracer la courbe C dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On placera en particulier les points de la courbe d'abscisses respectives –2 ; –1 ; 0 ; 1 et 3.

4. a. Par une lecture graphique, indiquer, suivant les valeurs du nombre réel k, le nombre de solutions de l'équation $g(x) = k$.

b. Prouver rigoureusement que l'équation $g(x) = 2$ admet une solution α et une seule. Prouver que α appartient à l'intervalle $[-2 ; -1]$.

c. Montrer que α vérifie la relation $\alpha = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

<u>Correction</u>

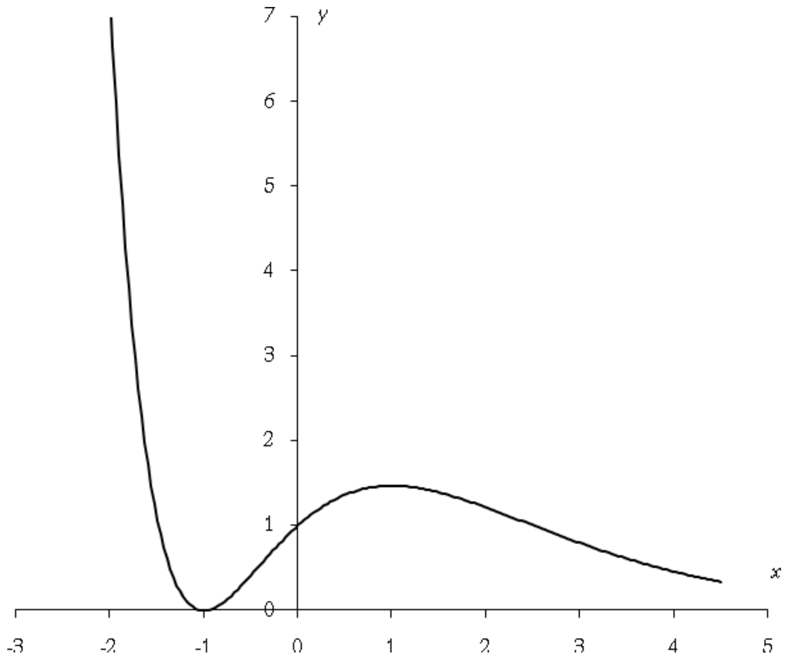
$g(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1. $g'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x}) = (x+1)e^{-x}(2-x-1) = (x+1)(1-x)e^{-x}$.

2. a. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{X \to +\infty} X^2 e^X = +\infty$.

b. $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$.

C a une asymptote horizontale en $+\infty$.



4. a. Si $k < 0$, pas de solutions ; si $k = 0$, une seule solution : $x = -1$, si $0 < k < 4/e$, 3 solutions, si $k = 4/e$: deux solutions dont $x = 1$, enfin si $k > 4/e$, une seule solution.

b. Si $x > -1$, $f(x)$ est toujours inférieur ou égal à $4/e$ (<2), donc $f(x) = 2$ n'a pas de solution sur $[1 ; +\infty[$. Lorsque $x < -1$, f est continue monotone strictement croissante de $]-\infty ; -1[$ vers $]0 ; +\infty[$. Comme 2 est dans cet intervalle, il existe une seule valeur de x pour laquelle $f(x) = 2$.

Claculons $f(-2)=7{,}39$ et $f(-1)=0$; comme $0 < 2 < 7{,}39$ on a $-2 < \alpha < -1$.

c. Nous savons que $f(\alpha)=2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 e^{-\alpha} = 2 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 = 2e^{\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+1=\sqrt{2e^{\alpha}} \\ \alpha+1=-\sqrt{2e^{\alpha}} \end{cases}$; comme $\alpha < -1$ on choisit la racine négative, soit $\alpha=-1-\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}}$.

1. 11. Un exercice standard

Soit f_k la famille de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par $f_k(x)=kx^2+e^{-x}$ où k est un réel **strictement positif** quelconque et g_k la famille de fonctions également définies sur $[0,+\infty[$ par $g_k(x)=2kx-e^{-x}$.

On note C_k la courbe représentative de f_k dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, unité graphique : 2 cm.

1. Sens de variation de g_k

a. Calculer la dérivée g_k' de g_k ; vérifier que $g_k'(x)$ est toujours strictement positif.

b. Calculer la limite de $g_k(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

c. Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un nombre réel $\alpha_k > 0$ tel que $g_k(\alpha_k)=0$. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de α_1 et de α_2.

d. Étudier le signe de $g_k(x)$ sur $[0, +\infty[$.

e. Montrer que $f_k'(x)=g_k(x)$; en déduire le sens de variation de f_k.

2. Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$

a. Déterminer la limite de $f_k(x)$ en $+\infty$.

b. Déterminer le signe de $f_k(x)-kx^2$ et sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat ; on note P_k la courbe d'équation $y=kx^2$.

3. Construction de f_k.

a. Dresser le tableau de variation de f_k. Préciser le signe de f_k.

b. Préciser l'équation de la tangente T à C_k au point d'abscisse 0.

c. Prouver que $f_k(\alpha_k)=k\alpha_k(\alpha_k+2)$.

d. On prend $k = 1$: montrer que le point de coordonnées $\left(\alpha_1\,;f_1(\alpha_1)\right)$ appartient à une parabole Q_1 dont on donnera l'équation. Tracer dans le même repère T, P_1, Q_1 et C_1.

Correction

$f_k(x)=kx^2+e^{-x}$, $g_k(x)=2kx-e^{-x}$.

1. Sens de variation de g_k

a. $g_k'(x)=2k+e^{-x}$ est toujours >0 puisque e^{-x} l'est ainsi que $2k$.

b. Comme e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$ la fonction $g_k(x)$ se comporte comme $2kx$ et tend donc vers $+\infty$.

c. On a $g_k(0)=0-e^{-0}=-1$ qui est négatif et $\lim\limits_{x\to+\infty} g_k(x)=+\infty$ qui est positif ; comme g_k est continue, monotone strictement croissante elle s'annule une seule fois. Calculons des valeurs approchées de α_1, solution de $2x-e^{-x}=0$: on a $0{,}351<\alpha_1<0{,}352$.

x	$g_1(x)$
0,35172775	−1,612E−05
0,35183246	0,00026696

x	$g_2(x)$
0,20335079	−0,00258881
0,20418848	0,00144524

De même on obtient la solution de $4x - e^{-x} = 0$: $0,203 < \alpha_2 < 0,205$.

d. Comme gk est croissante, on a $x < \alpha_k \Rightarrow g_k(x) < g_k(\alpha_k) = 0$ et $x > \alpha_k \Rightarrow g_k(x) > g_k(\alpha_k) = 0$

e. Il est immédiat que $f_k'(x) = 2kx - e^{-x} = g_k(x)$; f_k est donc décroissante avant α_k et croissante après.

x	0		α_k		$+\infty$
f_k'		$-$	0	$+$	
f_k	1	$\searrow$	$f_k(\alpha_k)$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comportement asymptotique de f_k en $+\infty$

a. Là encore e^{-x} tend vers 0 en $+\infty$ donc f_k se comporte comme kx^2 et tend donc vers $+\infty$.

b. Comme $f_k(x) - kx^2 = e^{-x}$, cette expression est positive et tend vers 0 à linfini. La courbe P_k est donc asymptote de C_k et C_k est au dessus de P_k.

3. Construction de f_k.

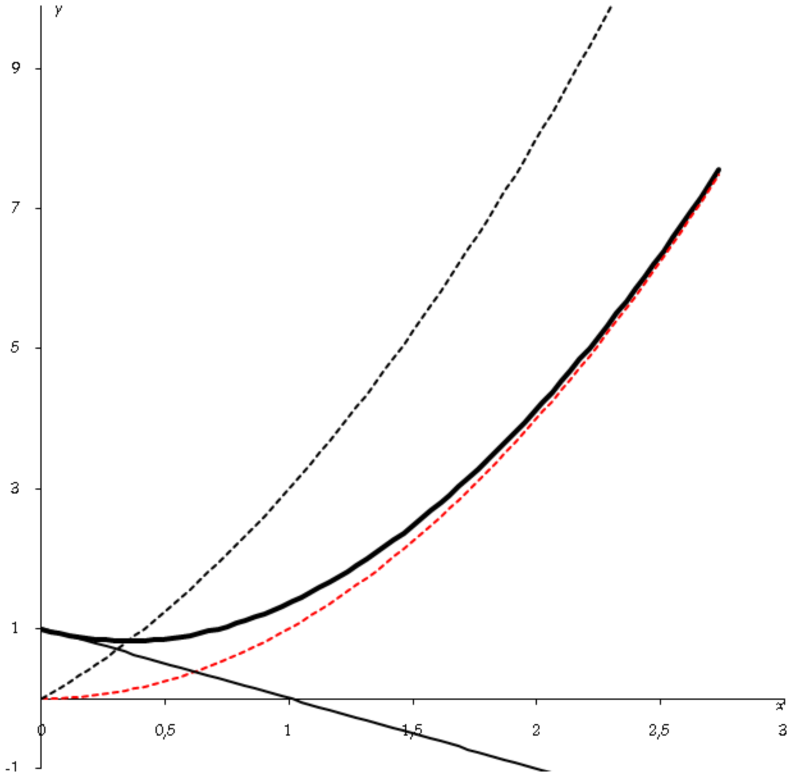
a. Comme kx^2 est positif ainsi que e^{-x}, $f_k(x)$ est positive.

b. On a $f_k'(0) = -1$ et $f_k(0) = 1$ d'où la tangente : $y = -x + 1$.

c. $g_k(\alpha_k) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha_k} = 2k\alpha_k$ donc

$$f_k(\alpha_k) = k\alpha_k^2 + 2k\alpha_k = k\alpha_k(\alpha_k + 2).$$

d. $k = 1$: $f_1(\alpha_1) = \alpha_1^2 + 2\alpha_1$ donc $\left(\alpha_1 ; f_1(\alpha_1)\right)$ appartient à la parabole d'équation $y = x^2 + 2x$.



Vous pouvez changer la valeur de k et voir également ce que fait f_k lorsque k est négatif…

<u>1. 12. Une suite de fonctions</u>

Pour tout réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_k(x) = \ln\left(e^x + kx\right) - x$. Soit C_k la courbe représentative de f_k dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur celui des ordonnées).

Etude préliminaire

On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x$.

1. Etudier le sens de variation de g.

2. En déduire que, pour tout réel a positif ou nul, $\ln(1+a)\le a$.

Partie A : étude de f_1

1. Calculer $f_1'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_1.

2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_1(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$.

3. Dresser le tableau de variation de f_1.

Partie B : étude et propriétés de f_k

1. Calculer $f_k'(x)$ et en déduire le sens de variation de f_k.

2. Montrer que, pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $f_k(x)=\ln\left(1+k\dfrac{x}{e^x}\right)$. En déduire la limite de f_k en $+\infty$.

3. a. Dresser le tableau de variation de f_k.

b. Montrer que, pour tout réel x de $[0,+\infty[$, on a $f_k(x)\le\dfrac{k}{e}$.

4. Déterminer une équation de la tangente (T_k) au point d'abscisse 0 de C_k.

5. Soit p et m deux réels strictement positifs tels que $p<m$. Etudier la position relative de C_p et C_m.

6. Tracer les courbes C_1 et C_2 ainsi que leurs tangentes en 0.

Partie C : majoration d'une intégrale

Soit λ un réel strictement positif, on note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_k et les droites $x=0$ et $x=\lambda$.

1. Sans calculer $A(\lambda)$, montrer que $A(\lambda)\le k\displaystyle\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.

2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\lambda xe^{-x}\,dx$.

3. On admet que $A(\lambda)$ admet une limite en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{\lambda\to\infty}A(\lambda)\le k$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction

Etude préliminaire

1. $g(x)=\ln(1+x)-x$ sur $[0\,;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1=\dfrac{1-x-1}{1+x}=\dfrac{-x}{1+x}<0$ donc g est décroissante.

2. Comme $g(0)=\ln 1-0=0$ et que g est décroissante, on a $g(x)\le 0$, soit $\ln(1+x)\le x$.

Partie A : étude de $f_1(x)=\ln(e^x+x)-x$

1. $f_1'(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x+x}-1=\dfrac{e^x+1-e^x-x}{e^x+x}=\dfrac{1-x}{e^x+x}$; le dénominateur est positif, le numérateur est positif lorsque $x\le 1$. Donc f est croissante sur [0 ; 1], décroissante sur $[1\,;+\infty[$.

2. Comme $x=\ln(e^x)$, on a $f_1(x)=\ln(e^x+x)-\ln e^x=\ln\left(\dfrac{e^x+x}{e^x}\right)=\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)$. Lorsque x tend vers $+\infty$ $\dfrac{x}{e^x}$ tend vers 0 (croissances comparées) donc f_1 tend vers ln1 $=0$.

Partie B : Propriétés des fonctions f_k

1. $f_k'(x)=\frac{e^x+k}{e^x+kx}-1=\frac{k-kx}{e^x+kx}=\frac{k(1-x)}{e^x+kx}$; comme k est strictement positif, f_k a le même sens de variation que f_1.

x	0		1		$+\infty$
f_k'		+	0	−	
f_k	0	↗	$\ln(e+k)-1$	↘	0

2. Avec le même calcul que précédemment $f_k(x)=\ln\left(1+k\frac{x}{e^x}\right)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3. a. Voir ci-contre.

b. Comme on le voit sur le T. V. on a

$f_k(x)\le f_k(1)=\ln(e+k)-1=\ln(e+k)-\ln e=\ln\left(\frac{e+k}{e}\right)=\ln\left(1+\frac{k}{e}\right)$;

utilisons l'inégalité $\ln(1+x)\le x$ avec $x=\frac{k}{e}$, on a $\ln\left(1+\frac{k}{e}\right)\le\frac{k}{e}$ d'où $f_k(x)\le\frac{k}{e}$.

4. En O, $f_k(0)=\ln 1=0$ et $f_k'(0)=\frac{k}{1}=k$ d'où l'équation de la tangente : $y=k(x-0)+0=kx$.

5. Calculons $f_m(x)-f_p(x)=\ln\left(e^x+mx\right)-x-\ln\left(e^x+px\right)+x=\ln\left(e^x+mx\right)-\ln\left(e^x+px\right)$. Cette expression est positive lorsque $e^x+mx>e^x+px\Leftrightarrow m>p$. Donc dans le cas présent C_p est en dessous de C_m.

6. A la fin.

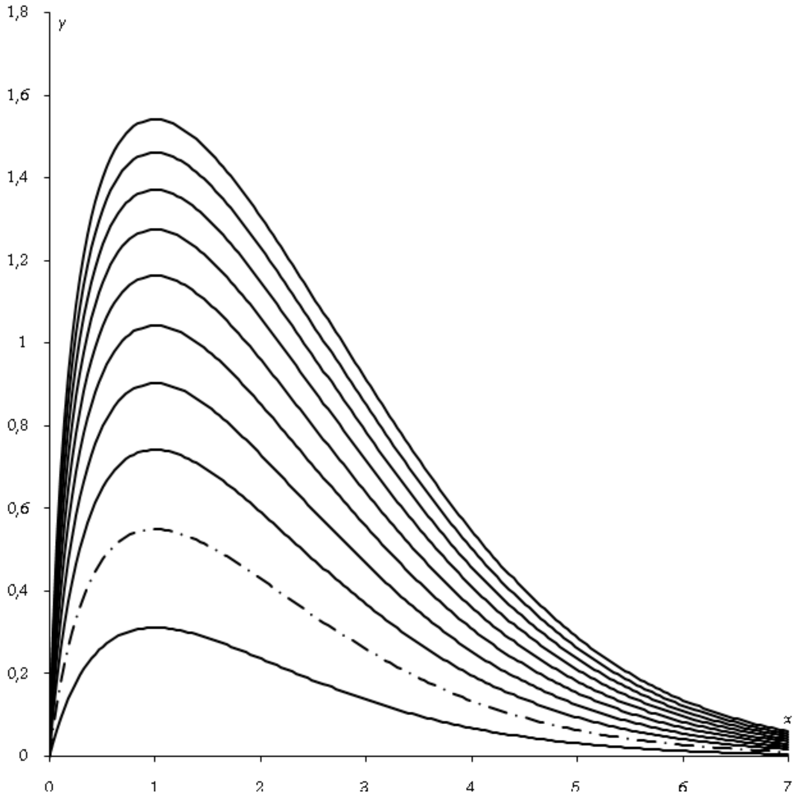
Partie C

1. Comme on doit calculer $A(\lambda)=\int_0^\lambda f_k(x)dx=\int_0^\lambda \ln(e^x+kx)-xdx=\int_0^\lambda \ln\left(1+\frac{kx}{e^x}\right)dx$, chose à priori impossible, on majore f_k par $\ln\left(1+\frac{kx}{e^x}\right)\le\frac{kx}{e^x}=kxe^{-x}$ d'où $A(\lambda)\le\int_0^\lambda kxe^{-x}dx=k\int_0^\lambda xe^{-x}dx$.

2. On intègre par parties avec $u=x, u'=1$ et $v'=e^{-x}, v=-e^{-x}$, soit

$$\int_0^\lambda xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^\lambda-\int_0^\lambda -e^{-x}dx=-\lambda e^{-\lambda}-0+\left[-e^{-x}\right]_0^\lambda=-\lambda e^{-\lambda}-e^{-\lambda}+1=I(\lambda).$$

3. La limite de $I(\lambda)$ est assez évidente : $\lambda e^{-\lambda}$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$, $I(\lambda)$ tend donc vers 1. Par conséquent comme $A(\lambda)\le kI(\lambda)$, on a à la limite $A(\lambda)\le k$.



Sur la figure la courbe la plus basse correspond à $k = 1$, la plus haute à $k = 10$.

1. 13. ln et exp

D'après Paris, Bac C, 1974

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$$

le symbole *ln* désignant le logarithme népérien.

1. Montrer que $e^{2x} - e^x + 1$ est strictement positif pour tout réel x. Étudier les variations de la fonction f.

Soit (C) la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction f.

2. Préciser les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

3. Vérifier que $f(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ et montrer que $f(x) - 2x$ tend vers une limite lorsque x tend vers $+\infty$. En déduire l'asymptote correspondante de (C).

4. Construire la courbe (C) (on précisera la tangente au point de (C) d'ordonnée nulle).

5. Déterminer, en utilisant la courbe (C), le nombre de solutions réelles de l'équation d'inconnue x :

$$e^{2x} - e^x + 1 = \frac{7}{8}$$

a. par le calcul,

b. en utilisant la courbe (C).

Correction

1. $e^{2x} - e^x + 1 = X^2 - X + 1$ en posant $X = e^x$. On a alors $\Delta = -3 < 0$ donc le trinômes est positif ainsi que $e^{2x} - e^x + 1$.

$f'(x) = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$ donc f' est du signe de $2e^x - 1$. Ce terme est positif lorsque $e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$. Par ailleurs $f(-\ln 2) = \ln\left(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1\right) = \ln\frac{3}{4}$.

2. En $-\infty$ c'est facile car e^{2x} et e^x tendent vers 0. On a donc *f* qui tend vers ln1=0.

En $+\infty$ $e^{2x} - e^x + 1$ se comporte comme e^{2x} et tend donc vers $+\infty$.

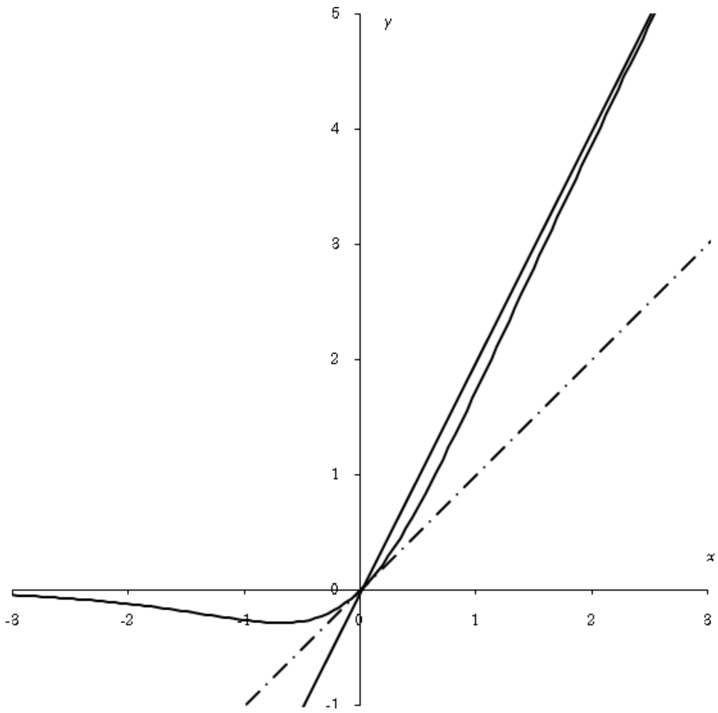
3. $f(x) - 2x = \ln(e^{2x} - e^x + 1) - \ln(e^{2x}) = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^{2x}}\right) = \ln[(e^{2x} - e^x + 1)e^{-2x}] = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$.

Les termes e^{-2x} et e^{-x} tendent vers 0 à l'infini, donc $f(x) - 2x$ tend vers ln1=0. La droite $y = 2x$ est donc asymptote de (C).

4. La tangente en 0 est $(y = x)$. Figure à la fin.

5. L'équation $e^{2x} - e^x + 1 = \frac{7}{8}$ est équivalente à $f(x) = \ln(7/8)$. Comme $\frac{3}{4} < \frac{7}{8} < 1$, on a $\ln\frac{3}{4} < \ln\frac{7}{8} < 0$, il y a donc deux solutions.

Par le calcul on pose $X = e^x$, ce qui donne l'équation $X^2 - X + 1 - \frac{7}{8} = 0 \Leftrightarrow X^2 - X + \frac{1}{8} = 0$, $\Delta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ d'où les racines $X_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et $X_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0 \Rightarrow x_1 = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.



x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	ln(3/4)	$\nearrow$	$+\infty$

1. 14. Recherche de fonction

Sur la feuille ci-jointe, figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse *O*.

On sait que le point $J(0\,;\,1)$ est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points $K(-1\,;\,0)$ et *J* et que la tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.

1. Déterminer une équation de (D).

2. On suppose qu'il existe deux réels *m* et *p* et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel *x*,

$$f(x) = mx + p + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0\,.$$

a. Démontrer que $m = p = 1$.

b. En utilisant le point J, montrer que, pour tout réel x, on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c. En déduire, après avoir exprimé $f(x)$ et $f(-x)$, que la fonction φ est impaire.

d. Déduire de la question b. que f', dérivée de f, est paire.

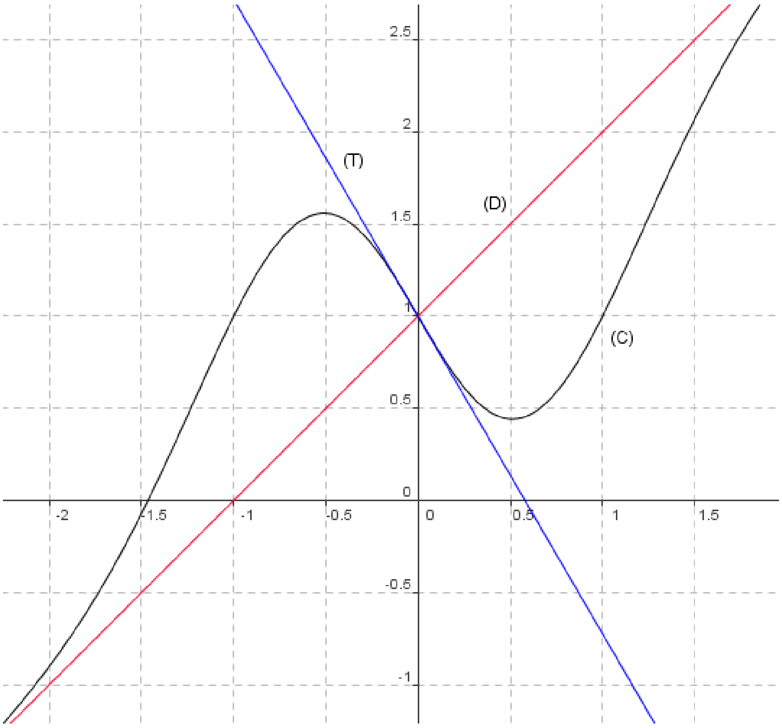
3. On suppose maintenant que, pour tout réel x, $\varphi(x) = (ax+b)e^{-x^2}$ où a et b sont des réels.

a. En utilisant la parité de φ, démontrer que $b = 0$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. En utilisant le coefficient directeur de (T), démontrer que $a = -e$.

d. Démontrer que $f(x) = x + 1 - xe^{-x^2+1}$.



Correction

1. La droite (D) passe par les points $J(0\,;\,1)$ et $K(-1\,;\,0)$, une équation est donc $y = x + 1$.

2. a. $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) - (mx + p) = 0$, c'est-à-dire que la droite d'équation $y = mx + p$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, c'est la droite (D). Donc $m = p = 1$.

b. Le point J est centre de symétrie de la courbe, on a donc la relation :

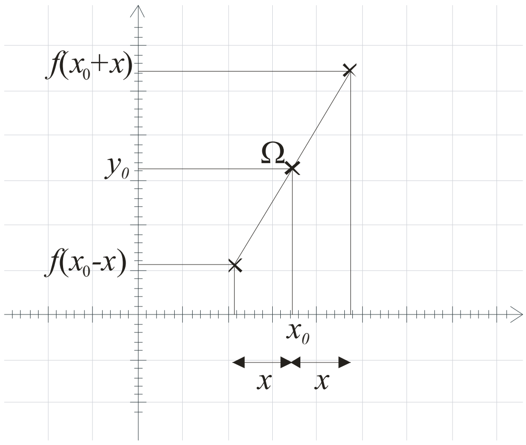
$f(x_J + x) - y_J = y_J - f(x_J - x)$, ou encore :

$$\frac{f(x_J+x)+f(x_J-x)}{2}=y_J$$

En remplaçant par les coordonnées de J, on obtient :

$$f(0 + x) - 1 = 1 - f(0 - x)$$

ou encore $f(x) + f(-x) = 2$.



c. $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$, $f(-x) = -x + 1 + \varphi(-x)$ donc $f(x) + f(-x) = 2 + \varphi(x) + \varphi(-x)$.

Or, on sait que $f(x) + f(-x) = 2$, on en déduit que $\varphi(x) + \varphi(-x) = 0$, ou encore que $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, c'est-à-dire que la fonction φ est impaire.

d. $f(x) + f(-x) = 2$, donc, en dérivant chaque terme : $f'(x) - f'(-x) = 0$, soit $f'(x) = f'(-x)$. Conclusion f' est paire. Attention, la dérivée de $f(-x)$ est $-f'(-x)$ (dérivation des fonctions composées).

2. a. $\varphi(x)=(ax+b)e^{-x^2} \Rightarrow \varphi(-x)=(-ax+b)e^{-x^2}$; comme φ est impaire, on a $ax + b = -ax + b$, soit $b = 0$.

b. $f(x)=x+1+\varphi(x)=x+1+axe^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=1+\varphi'(x)=1+ae^{-x^2}+(ax)(-2x)e^{-x^2}=1+a(1-2x^2)e^{-x^2}$.

c. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0, soit J, est $f'(0) = (1 - e)$ (équation de (T)).

On a donc l'égalité : $f'(0)=1+a=1-e \Rightarrow a=-e$.

d. Il reste à conclure : $f(x)=x+1+axe^{-x^2}=x+1-exe^{-x^2}$.

<u>1. 15. Etude de fonction hyperbolique</u>

Soit f l'application de $]0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=2x+\frac{1}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1}$, et g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x)=2e^{2x}-5e^x+2$.

<u>Partie A</u>

1. Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$.

2. Montrer que pour tout x de $]0\,;+\infty[$ on a $f(x)=2x-\frac{1}{2}+\frac{e^x}{e^x-1}$.

3. Résoudre l'équation $g(x) = 0$ puis factoriser $g(x)$.

<u>Partie B : Etude de f</u>

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. a. Montrer que la droite (D) d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C) représentative de f.

b. Etudier la position de (C) par rapport à (D).

3. Montrer que la fonction dérivée de f est du signe de la fonction g de la partie A et dresser le tableau de variation de f.

4. Réprésenter (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm)

5. a. Etudier graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m, l'intersection de (C) et de la droite (D_m) d'équation $y = 2x + m$.

b. Démontrer par le calcul ces résultats (on pourra utiliser le A.1.).

Partie C : Calcul d'aire

1. En reconnaissant la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, déterminer les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$.

2. En déduire, en utilisant A.2., les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de $f(x)-(2x+\frac{1}{2})$.

3. Calculer l'aire du domaine plan limité par (C), (D) et les droites d'équation $x = \ln 2$ et $x = \ln 4$.

Correction

Partie A : Il suffit de « partir de l'expression de droite » dans chaque cas, les résultats sont immédiats.

Partie B :

1. Pour $x>0$, $e^x>1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x-1=0$; comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^x+1=2$ on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{e^x+1}{e^x-1}=+\infty$ et comme $2x$ tend vers 0, f tend vers $+\infty$ en 0^+. En $+\infty$ numérateur et dénominateur sont équivalents à e^x donc le quotient tend vers 1 et f tend vers $+\infty$ en se comportant comme $2x+\frac{1}{2}.1=2x+\frac{1}{2}$.

2. a. $f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e^x-1}$ tend évidemment vers 0 à l'infini donc asymptote.

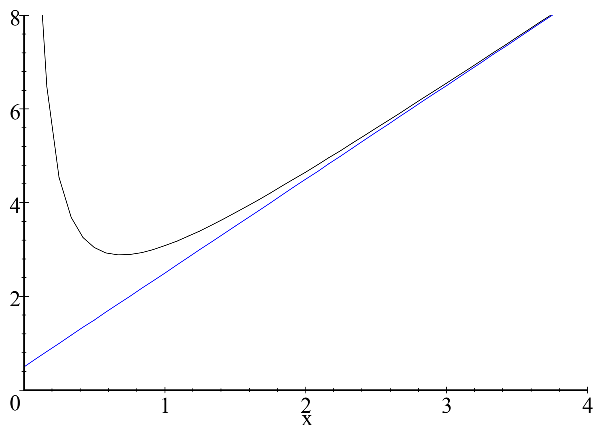
b. $e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$ donc (C) est au-dessus de (D).

3. f est la somme de deux fonctions dérivables et est donc dérivable. On dérive à partir de $f(x)=2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}$: $f'(x)=2+\frac{-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-3e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.

f' est donc du signe de $(e^x-2)(2e^x-1)$, or $e^x-2>0 \Leftrightarrow x>\ln 2$ et $2e^x-1>0 \Leftrightarrow x>\ln 1/2=-\ln 2$.

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
e^x-2		$-$	0	$+$	
$2e^x-1$		$+$		$+$	
f'		$-$		$+$	
f	$+\infty$	↘	$f(\ln 2)$	↗	$+\infty$

4. (C) admet deux asymptotes : la droite d'équation (x=0) et la droite (D).



5. a. m représente l'ordonnée à l'origine de la droite, ces droites sont toutes parallèles.

Si $m<\frac{1}{2}$, la droite (D_m) est parallèle à (D) et située sous (D) donc elle ne coupe pas (C) ; si $m=\frac{1}{2}$ on voit que (D) ne coupe pas (C), c'est l'asymptote ; si $m>\frac{1}{2}$, il semble que la droite (D_m) coupe (C) en un seul point.

b. $M(x,y)\in(D_m)\cap(C)\Leftrightarrow 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}=2x+m\Leftrightarrow\frac{1}{e^x-1}=m-\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^x-1=\frac{2}{2m-1}\Leftrightarrow e^x=\frac{2m+1}{2m-1}$.

Donc il faut $\frac{2m+1}{2m-1}>0\Leftrightarrow m\in\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]+\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et comme x doit être positif :

$x=\ln\left(\frac{2m+1}{2m-1}\right)>0\Leftrightarrow\frac{2m+1}{2m-1}>1\Leftrightarrow\frac{2m+1-2m+1}{2m-1}>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$.

Partie C

1. $\int\frac{e^x}{e^x-1}dx=\ln\left(e^x-1\right)+K$ car $e^x-1>0$.

2. $f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)=\frac{e^x}{e^x-1}-1\Rightarrow\int f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=\ln(e^x-1)-x+K'$.

3. Comme (C) est au-dessus de (D) , l'aire cherchée vaut

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)-\left(2x+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\ln(e^x-1)-x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}=\ln 3-\ln 4-\ln 1+\ln 2=\ln 3-\ln 2$.

1. 16. Une intégrale peu engageante…

1. On considère la fonction numérique f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Pour tout réel $\alpha\geq 1$, on considère les intégrales

$$J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx\ \text{ et }\ K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx\,.$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Montrer que la dérivée de f peut s'écrire $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. En déduire le sens de variation de f.

c. Donner l'allure de la courbe C.

2. a. Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$.

b. Soit $\alpha\geq 1$, montrer que $\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\leq K(\alpha)\leq\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

c. En déduire que $\frac{1}{2}\leq K(\alpha)\leq e$.

3. a. Calculer $J(\alpha)$.

b. Démontrer que pour tout réel $\alpha\geq 1$, $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2)\leq K(\alpha)\leq\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2)$.

4. Démonstration de cours. Démontrer le théorème suivant :

Soient u, v et w des fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ telles que pour tout réel $x\geq 1$, $u(x)\leq v(x)\leq w(x)$.

S'il existe un réel l tel que $\lim_{x\to+\infty} u(x)=l$ et $\lim_{x\to+\infty} w(x)=l$ alors $\lim_{x\to+\infty} v(x)=l$.

5. Déduire de ce qui précède la limite de $K(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

Correction

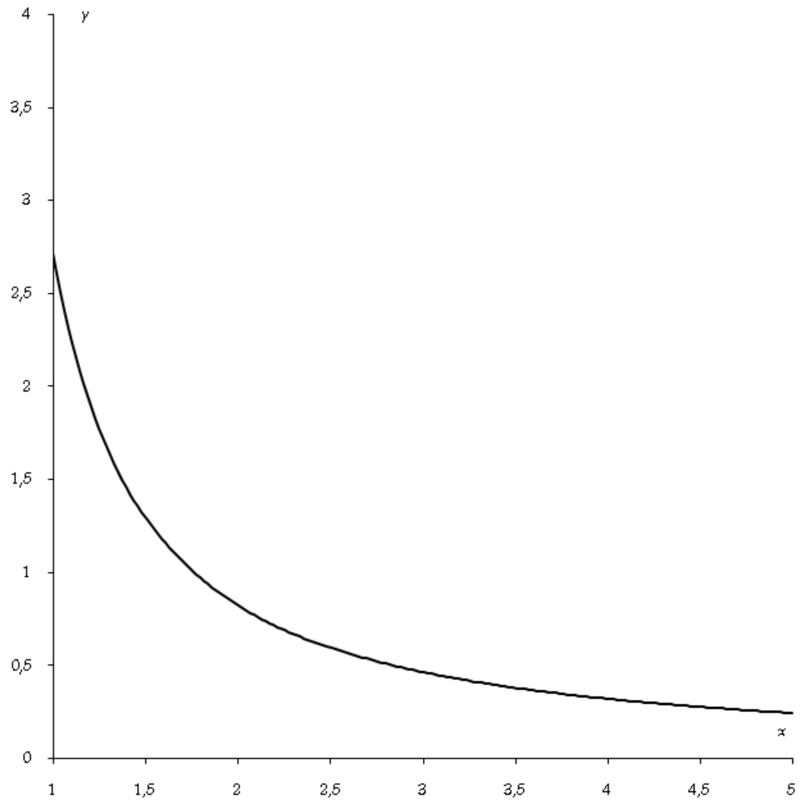
1. $[1\,;+\infty[$, $f(x)=\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. $\alpha\geq 1$, $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx$ et $K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

a. En $+\infty$ $1/x$ tend vers 0 donc f tend vers $0.e^{0}=0$. L'axe horizontal est une asymptote de (C).

b. $f'(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right)\left[1+\frac{1}{x}\right]=\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left[\frac{x+1}{x}\right]\exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme x est supérieur à 1, f' est toujours négative et f est décroissante.

c.



2. a. $K(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx$ correspond à l'aire comprise entre la courbe (C) l'axe (Ox) et les droites $x=\alpha$, $x=2\alpha$.

b. Sur l'intervalle $[\alpha,2\alpha]$, f est décroissante et on a

$$1\leq\alpha\leq x\leq 2\alpha\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2\alpha}\leq\frac{1}{x}\leq\frac{1}{\alpha}\leq 1\\ f(2\alpha)=\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\leq f(x)\leq f(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\end{cases}.$$

Intégrons cette inégalité : $\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)dx\leq K(\alpha)\leq\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx$. Or on a

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)dx=(2\alpha-\alpha)\frac{1}{2\alpha}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)=\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right),$$

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)dx=(2\alpha-\alpha)\frac{1}{\alpha}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

d'où $\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\le K(\alpha)\le\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

c. Comme $0\le\frac{1}{2\alpha}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\alpha}\le 1$, $\frac{1}{2}\exp(0)\le\frac{1}{2}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\le K(\alpha)\le\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le\exp(1)$, soit $\frac{1}{2}\le K(\alpha)\le e$.

3. a. $J(\alpha)=\int_{\alpha}^{2\alpha}\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_{\alpha}^{2\alpha}=\ln 2\alpha-\ln\alpha=\ln\frac{2\alpha}{\alpha}=\ln 2$.

b. Comme on a $0\le\frac{1}{2\alpha}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{\alpha}\le 1$, on a $1\le\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\le\exp\left(\frac{1}{x}\right)\le\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le e$, soit en multipliant par 1/x : $\frac{1}{x}\le\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\le\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)\le\frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le\frac{1}{x}e$ puis en intégrant :

$\ln 2\le(\ln 2)\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\le K(\alpha)\le(\ln 2)\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\le e\ln 2$.

4. Démonstration de cours : il faut s'attendre à tout avec les méchants professeurs de maths…

5. Lorsque α tend vers $+\infty$, $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$ et $\exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ tendent vers $e^0=1$. La limite est donc ln2.

1. 17. Tangente hyperbolique

Dans tout le problème $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormé du plan P.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$. On appelle C la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

1. Etude de f:

a. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier vos calculs.

b. Préciser les équations des asymptotes.

2. Donner l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f. Dresser le tableau de variation de f. Préciser $f(0)$.

3. Déterminer une équation de la tangente à C au point d'abscisse $x=0$; on note T_0 cette tangente.

4. Courbe :

a. Soit x un réel quelconque. Calculer $f(x)+f(-x)$.

b. Quelle propriété de symétrie peut on déduire de la question précédente ?

c. Tracer C, ses asymptotes et la tangente T_0.

Partie B

1. a. Soit $u(x)=1+e^{-x}$. Calculer $u'(x)$.

b. En déduire la primitive F de f qui prend la valeur – ln2 en $x=0$.

2. a. On pose $A=\int_0^1 f(x)dx$. Calculer A.

b. Déterminer le réel c tel que $A=\ln c$.

3. Pour tout entier naturel n non nul on pose $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}}f(x)dx$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Correction

Partie A

1. a. Remarquons de suite que $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\frac{e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{e^{x}+1}$ donc la limite en $+\infty$ est $\frac{1}{+\infty}=0$ et la limite en $-\infty$ est $\frac{1}{0+1}=1$.

b. Les asymptotes sont $y = 0$ en $+\infty$ et $y = 1$ en $-\infty$.

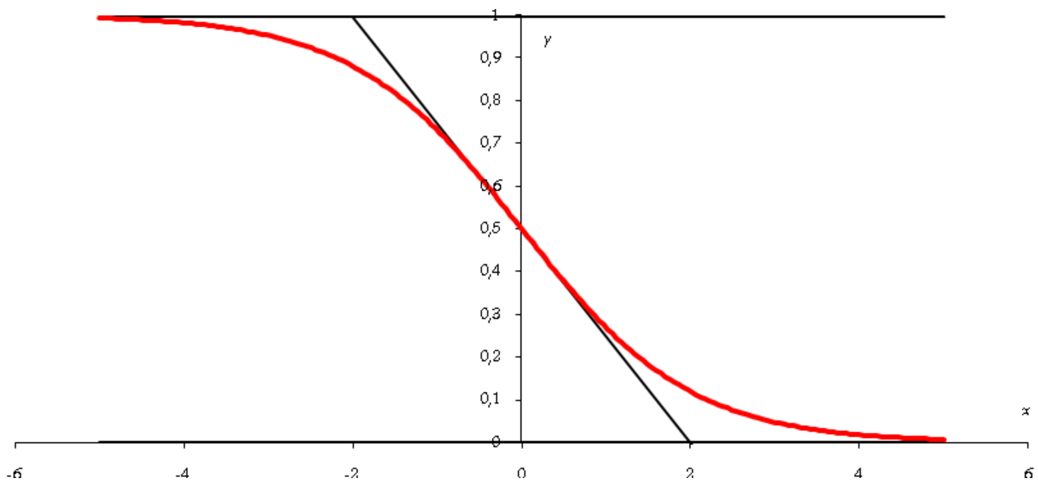
2. $f'(x)=-\frac{(e^{x}+1)'}{(e^{x}+1)^2}=-\frac{e^{x}}{(e^{x}+1)^2}$ qui est évidemment strictement négative. $f(0)=\frac{1}{2}$.

3. $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$.

4. a. $f(x)+f(-x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}+\frac{e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}+1+e^{x}+1}{(1+e^{-x})(1+e^{x})}=\frac{2+e^{-x}+e^{x}}{1+e^{-x}+e^{x}+1}=1$.

b. Le point de coordonnées $\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C.

c.



Partie B

1. a. $u(x)=1+e^{-x}$. $u'(x)=-e^{-x}$.

b. On remarque que $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{-u'}{u}$ donc les primitives de f sont de la forme

$$F(x)=-\ln|u|+K=-\ln\left(1+e^{-x}\right)+K.$$

En 0, on a $F(0)-\ln 2=-\ln(1+1)+K\Rightarrow K=0$.

2. a. & b. $A=\int_0^1 f(x)dx=\left[-\ln\left(1+e^{-x}\right)\right]_0^1=-\ln\left(1+e^{-1}\right)+\ln\left(1+e^{0}\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=\ln\frac{2e}{e+1}$.

3. $v_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx=-\ln\left(1+e^{-1-\frac{1}{n}}\right)+\ln\left(1+e^{-\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\ln\left(1+e^{-1-0}\right)+\ln\left(1+e^{0}\right)=\ln\frac{2}{1+e^{-1}}=A$.

On pouvait s'attendre au résultat car $\int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} f(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)dx$.

1. 18. Tangente hyperbolique et primitives

A. Une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4\dfrac{e^x}{e^x+1}$

On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$

(unité graphique : 2 cm)

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ .En déduire les droites asymptotes à C.
2. Etudier les variations de f et en dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que le point d'intersection A de C et de l'axe des ordonnées est centre de symétrie pour C.
4. Donner une équation de la tangente à C en A.
5. Tracer sur un même graphique : C, sa tangente au point A, et ses droites asymptotes.

B. Sa dérivée

On considère la fonction f', dérivée de f. On note C' sa courbe dans $(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j})$.

1. En utilisant le fait que C admet le point A comme centre de symétrie, justifier que f' est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f' en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les droites asymptotes à C'.
3. Montrer que $f''(x)=4\dfrac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$; étudier les variations de f' et dresser son tableau de variations.
4. Tracer C' sur le même graphique que C.
5. Justifier la position de C' par rapport à C.

C. Une de ses primitives

1. a. Justifier que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

1. b. Soit F, la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $x = 0$, et soit Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).

Quel est le sens de variation de F ?

2. Expliciter $F(x)$, pour tout x réel.

3. a. Déterminer les limites de F en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire une propriété de la courbe Γ.

3. b Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 4x - 4\ln 2$ est asymptote à Γ.

4. Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

5. Tracer Γ et ses asymptotes sur une autre feuille de papier millimétré.

Correction

A. La fonction f

1. $\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{-x}+1}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

La courbe C admet donc deux asymptotes horizontales : la droite d'équation $y = 4$ en $+\infty$ et la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$.

2. $x \mapsto e^x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^x + 1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et n'est jamais nulle. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = 4\dfrac{e^x(e^x+1) - e^x.e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = 4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$: $f'(x) > 0$ pour tout x réel, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 4$

3. $x_A = 0$ et $y_A = f(0) = 2$: pour montrer que le point A est centre de symétrie de C, montrons que, pour tout x réel, * $x_A - x \in D_f$ et $x_A + x \in D_f$: vrai car $D_f = \mathbb{R}$

* $f(x_A - x) + f(x_A + x) = 2y_A$

$$f(-x)+f(x) = 4\frac{e^x}{e^x+1} + 4\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = 4\left(\frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}\right) = 4\frac{e^x+e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}+2} = 4 \text{ C.Q.F.D.}$$

4. $f'(0) = 1$: l'équation de la tangente à C en A est donc : $y - 2 = 1(x - 0)$ soit : $y = x + 2$.

B. Sa dérivée

1. f' est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, on sait que pour tout x réel, $f(-x) + f(x) = 4$, soit en dérivant : $-f'(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$: f' est une fonction paire.

2. $f'(x) = 4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = 4\dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$; de plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 0$: C' admet donc une asymptote horizontale, d'équation $y = 0$, en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. $f'''(x) = 4\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)^2 - e^x \times 2e^x\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4} = 4\dfrac{e^x(e^x+1) - e^x \times 2e^x}{(e^x+1)^3}$, $f''(x) = 4\dfrac{e^x - e^{2x}}{(e^x+1)^3}$.

$f''(x)$ est du signe de $e^x - e^{2x}$: $e^x - e^{2x} > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{2x} \Leftrightarrow x > 2x \Leftrightarrow 0 > x$.

Tableau de variations de f' :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0$

5. Il semble que C se trouve au-dessus de C'. Pour le montrer, étudions le signe de $f(x) - f'(x)$:

$f(x) - f'(x) = 4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)} - 4\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2} = 4\dfrac{e^x(e^x+1) - e^x}{(e^x+1)^2} = 4\dfrac{e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}$; $f(x) - f'(x) > 0$ donc C est au-dessus de C'.

C. Une de ses primitives

1. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle admet une infinité de primitives.

1\. b. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. f est sa dérivée, et $f(x) > 0$ pour tout x réel donc F est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2\. On reconnaît dans l'écriture de $f(x)$ le modèle : $f(x) = 4\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, avec $u(x) = e^x + 1$

Les primitives F de f sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme : $F(x) = 4\ln\left(\left|e^x+1\right|\right) + K, K \in \mathbb{R}$. Or, pour tout x réel, $e^x + 1 > 0$ donc $F(x) = 4\ln\left(e^x+1\right) + K, K \in \mathbb{R}$.

De plus, $F(0) = 0$ donc : $4 \ln (2) + K = 0$; c'est à dire $K = -4\ln 2$. Il vient donc : $F(x) = 4\ln(e^x + 1) - 4\ln 2$.

3\.a. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -4\ln 2$. Γ admet donc une asymptote horizontale, d'équation $y = -4 \ln 2$, en $-\infty$.

3\.b. Etude de l'asymptote oblique en $+\infty$:

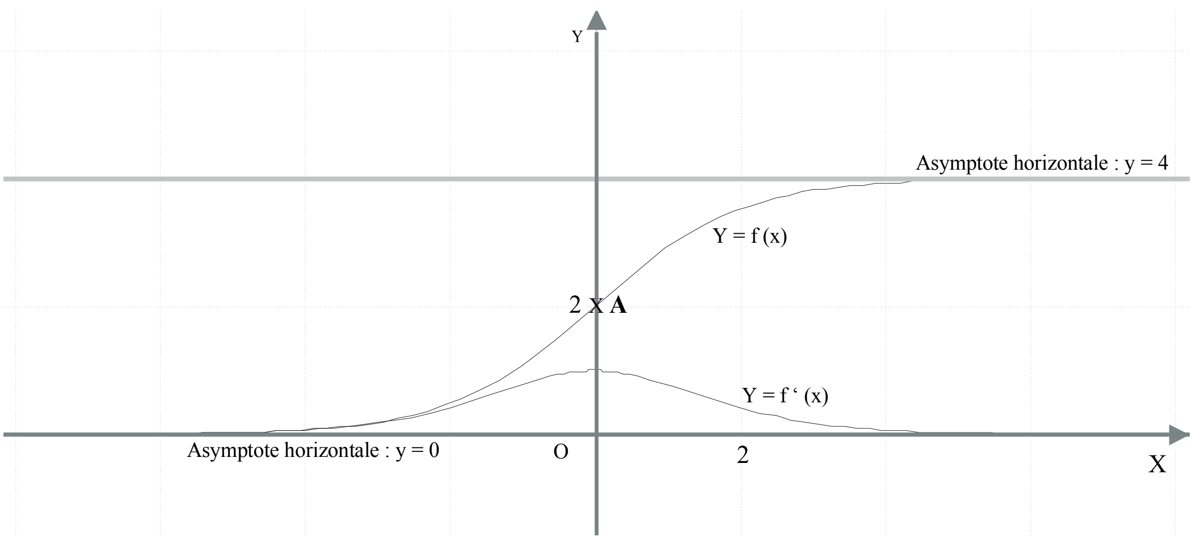
$$\lim_{x\to+\infty}(F(x)-(4x-4\ln 2)) = \lim_{x\to+\infty}(4\ln(e^x+1)-4\ln 2-4x+4\ln 2) = \lim_{x\to+\infty}(4\ln(e^x(1+e^{-x}))-4x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}(4x+4\ln(1+e^{-x})-4x) = \lim_{x\to+\infty}(4\ln(1+e^{-x})) = 0$$

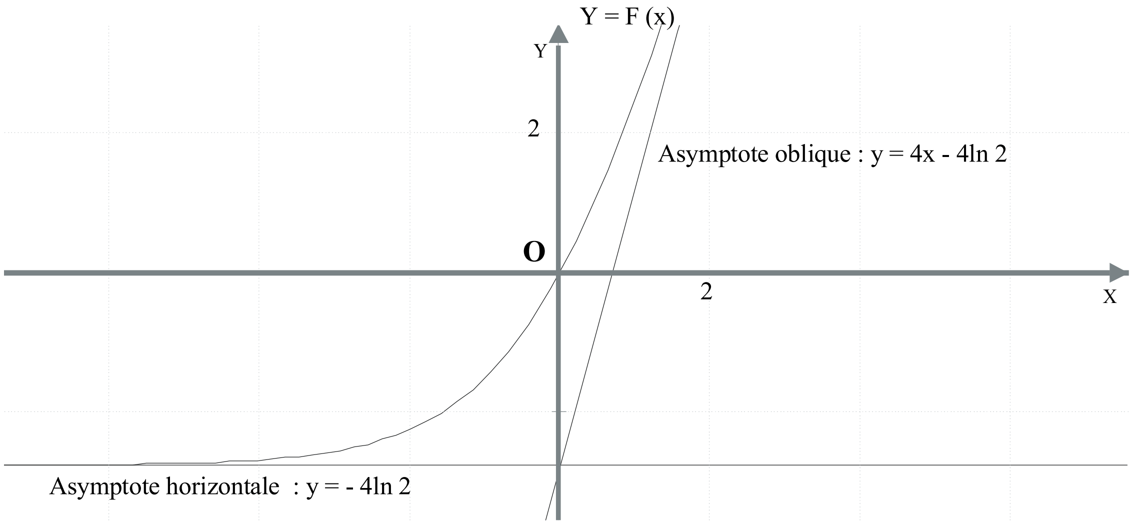
Γ admet donc une asymptote oblique, d'équation $y = 4x - 4\ln 2$, en $+\infty$.

4\. Tableau de variations de F :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$
$F(x)$	$-4\ln 2 \nearrow +\infty$

Graphiques





1. 19. Antilles 09/2008 7 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f\left(x\right)=x+2-\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C.

c. Étudier la position de C par rapport à D_1.

2. a. On note f' la fonction dérivée de f. Calculer $f'\left(x\right)$ et montrer que, pour tout réel x, on a :

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{e^{x}-3}{e^{x}+3}\right)^{2}.$$

b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse ln3 ?

b. En utilisant les variations de la fonction f, étudier la position de la courbe C par rapport à D_2.

4. a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+1$.

b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\ln 3\right]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''\left(x\right)=\dfrac{12e^{x}\left(e^{x}-3\right)}{\left(e^{x}+3\right)^{3}}$.

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C. Tracer la courbe C, les tangentes D_2, D_3 et les asymptotes à la courbe C .On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{e^{x}+3}$.

b. Soit λ un réel strictement négatif.

On note $A\left(\lambda\right)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1, C et les droites d'équations $x=\lambda$ et $x = 0$. Montrer que $A\left(\lambda\right)=4\ln 4-4\ln\left(e^{\lambda}+3\right)$.

c. Calculer $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A\left(\lambda\right)$.

Correction

$f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$.

1. a. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty+2-\dfrac{4\times 0}{0+3}=-\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x-2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+3}=0$.

c. $f(x)-(x+2)=-\dfrac{4e^x}{e^x+3}<0$ car $e^x>0$. C est au-dessus de D_1.

2. a. $f'(x)=1-4\dfrac{e^x\left(e^x+3\right)-e^x\left(e^x\right)}{\left(e^x+3\right)^2}=1-\dfrac{12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}=\dfrac{\left(e^x+3\right)^2-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+6e^x+9-12e^x}{\left(e^x+3\right)^2}=\dfrac{\left(e^x-3\right)^2}{\left(e^x+3\right)^2}$.

b. f' est positive sur $\mathbb{R}$, f est croissante. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty+2-4\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+3e^{-x}}=+\infty-4=+\infty$.

(Remarque : comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{1+3e^{-x}}=4$, la droite $y=x+2-4=x-2$ est asymptote en $+\infty$.)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. a. D_2 : $f'(\ln 3)=\left(\dfrac{e^{\ln 3}-3}{e^{\ln 3}+3}\right)^2=0$ donc tangente horizontale.

b. Comme f est croissante, C est en-dessous de D_2 lorsque $x<\ln 3$ et au-dessus lorsque $x>\ln 3$.

4. a. $f'(0)=\left(\dfrac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2=\left(\dfrac{-2}{4}\right)^2=\dfrac{1}{4}$, $f(0)=2-\dfrac{4}{1+3}=1$, $y=f'(0)(x-0)+f(0)=\dfrac{1}{4}x+1$.

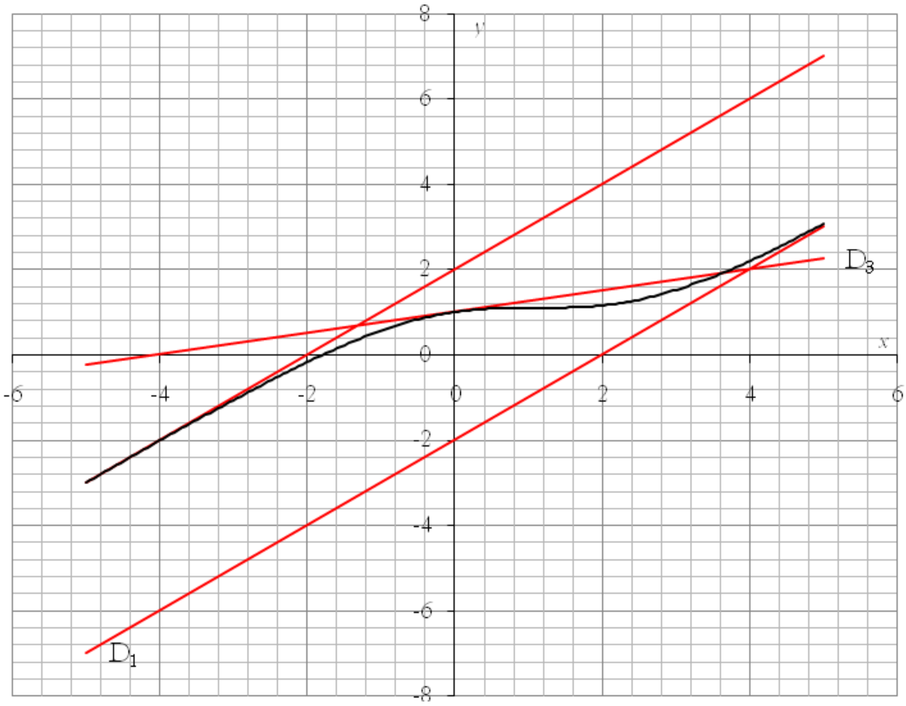
b. Posons $g(x)=f(x)-\left(\dfrac{1}{4}x+1\right)\Rightarrow g'(x)=f'(x)-\dfrac{1}{4}\Rightarrow g''(x)=f''(x)$.

Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;\ln 3\right]$, $f''(x)=\dfrac{12e^x\left(e^x-3\right)}{\left(e^x+3\right)^3}$ est <0, de même que g''. g' est décroissante et vaut 0 lorsque $x=0$; g' est donc positive avant 0, négative après 0 ; g est croissante avant 0, décroissante après 0 ; comme $g(0)=0$, g est toujours négative donc C est en dessous de D_3.

x	$-\infty$		0		$\ln 3$
g''		$-$		$-$	
g'		$\searrow$	0	$\searrow$	
signe g'		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

signe g	$-$ 0 $-$

5.



6. a. La dérivée de e^x+3 est e^x, g est de la forme $\frac{u'}{u}$, une primitive de g est $\ln\left(e^x+3\right)$.

b. $A(\lambda)=\int_\lambda^0 f(x)-(x+2)\,dx=\int_\lambda^0 -4\frac{e^x}{e^x+3}dx=-4\left[\ln\left(e^x+3\right)\right]_\lambda^0=-4\ln\left(e^\lambda+3\right)+4\ln\left(e^0+3\right)$, soit

$A(\lambda)=4\ln 4-4\ln\left(e^\lambda+3\right)$.

c. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)=4\ln 4-4\ln(0+3)=4\ln 4-4\ln 3$.

1. 20. ROC+fonction intégrale, Am. du Nord 2007

7 points

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

* la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

* $e^0=1$;

* pour tout réel x, on a $e^x>x$;

* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x)\le\varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^x-\frac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x)\geq 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Montrer que f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

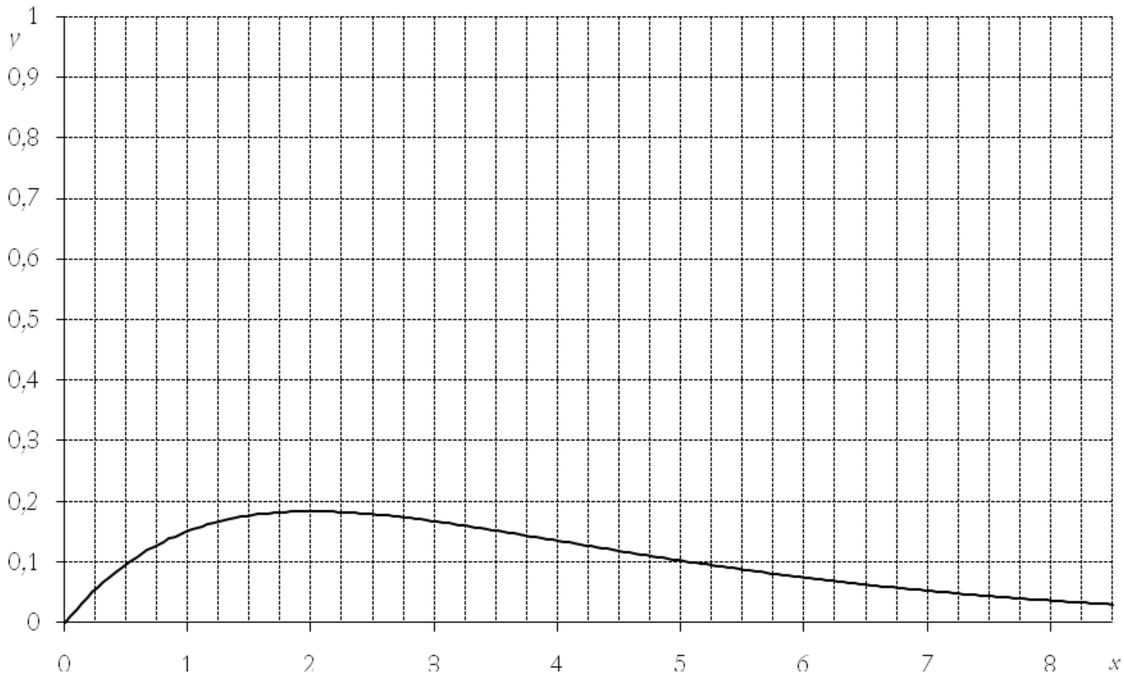
a. Montrer que F est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x)=1-e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;+\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha)=0,5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n\geq 0,5$.



Correction

1. On numérote les propriétés :

(1) la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

(2) $e^0=1$;

(3) pour tout réel x, on a $e^x > x$;

(4) soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \le \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. La dérivée de g est $g'(x) = e^x - x$ (utilisation de (1)) qui est positive (utilisation de (2)) ; par ailleurs $g(0) = 1$ (utilisation de (3)), soit $g(x) \ge 1$ et donc $g(x) \ge 0$.

b. On a donc $e^x \ge \frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{e^x}{x} \ge \frac{x}{2}$; comme $\frac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (utilisation de (4)).

2. $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

a. L'exponentielle est toujours positive ; sur $[0\,;+\infty[$, il en est de même de $\frac{1}{4}x$ donc $f(x) \ge 0$.

b. On pose $X = \frac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(x) = \frac{1}{2} \lim\limits_{X\to+\infty} X e^{-X} = 0$ (croissances comparées). La courbe de f admet l'axe (Ox) comme asymptote horizontale.

c. $f'(x) = \frac{1}{4}\left[e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{8}[2 - x] e^{-\frac{x}{2}}$ donc positive avant 2, négative après. $f(2) = \frac{1}{2} e^{-1} = \frac{1}{2e}$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

3. a. $F'(x) = f(x)$ (cours…) qui est positive sur $[0\,;+\infty[$ comme le montre le tableau de variation.

b. Soit on intègre par parties, soit on dérive $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ en vérifiant que $F(0) = 0$.

$F(0) = 1 - e^0 - 0e^0 = 1 - 1 = 0$; $F'(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} = f(x)$.

c. Tous les termes contenant $e^{-\frac{x}{2}}$ tendent vers 0 donc F tend vers 1.

x	0		$+\infty$
$f(x)$		+	
$F(x)$	0	$\nearrow$	1

d. F est monotone strictement croissante, continue sur $[0\,;+\infty[$; $0 < 0,5 < 1$, il existe donc un unique α dont l'image par F est 0,5. La calculatrice donne : $f(3,35) \approx 0,499$ et $f(3,36) \approx 0,501$; on prend $\alpha \approx 3,36$.

4. $A_n = F(n) - F(0) = F(n)$; on a donc $A_n \ge 0,5$ lorsque $n \ge \alpha$, soit pour $n = 4$.

1. 21. Equation différentielle, équation fonctionnelle et sinus hyperbolique, La Réunion, juin 2004

6 points

On désigne par f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et par f' sa fonction dérivée. Ces fonctions vérifient les propriétés suivantes :

(1) Pour tout nombre réel x, $\left(f'(x)\right)^2-\left(f(x)\right)^2=1$.

(2) $f'(0)=1$

(3) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que la dérivée de u^n est $nu'u^{n-1}$.

1. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x)\neq 0$.

b. Calculer $f(0)$.

2. En dérivant chaque membre de l'égalité de la proposition (1), démontrer que :

(4) Pour tout nombre réel x, $f''(x)=f(x)$.

où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f.

3. On pose $u=f'+f$ et $v=f'-f$.

a. Calculer $u(0)$ et $v(0)$.

b. Démontrer que $u'=u$ et $v'=-v$.

c. En déduire les fonctions u et v.

d. En déduire que, pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. a. Etudier les limites de la fonction f en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

5. a. Soit m un nombre réel. Démontrer que l'équation $f(x)=m$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

b. Déterminer cette solution lorsque $m=3$ (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-2} près).

Correction

1. a. $\left(f'(x)\right)^2=\left(f(x)\right)^2+1$: ce nombre est toujours strictement positif (à cause du 1), il ne peut s'annuler.

$\left[f'(x)\right]^2\neq 0\Rightarrow f'(x)\neq 0$.

b. Comme $f'(0)=1$, en remplaçant x par 0 dans (1), on a $1-(f(0))^2=1\Rightarrow f(0)=0$.

2. $2f''(x)\left(f'(x)\right)^{2-1}-2f'(x)\left(f(x)\right)^{2-1}=0\Leftrightarrow 2f''(x)f'(x)-2f'(x)f(x)=0\Leftrightarrow f''(x)=f(x)$ après simplification par $2f'(x)$ qui n'est pas nul.

3. a. $u(0)=f'(0)+f(0)=1$, $v(0)=f'(0)-f(0)=1-0=1$.

b. $u'=f''+f'=f+f'=u$ et $v'=f''-f'=f-f'=-v$.

c. $u=Ce^x$; avec $u(0)=1$, on a $C=1$; de même $v=Ce^{-x}$; avec $v(0)=1$ on a $v=e^{-x}$.

d. Au final $\begin{cases}u=e^x\\ v=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f'+f=e^x\\ f'-f=e^{-x}\end{cases}\Rightarrow 2f=e^x-e^{-x}\Rightarrow f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

4. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}(+\infty-0)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}(0-\infty)=-\infty$.

b. $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)>0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$

$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

5. a. Deux possibilités : par lecture du TV, par le calcul.

Comme f est continue, monotone strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, elle est bijective et l'équation $f(x) = m$ a une unique solution pour tout m.

Par le calcul : on pose $e^x = X$, ce qui donne $\frac{1}{2}\left(X - \frac{1}{X}\right) = m \Leftrightarrow X^2 - 2mX - 1 = 0$: $\Delta = 4m^2 + 4 > 0$ d'où

$$X_1 = \frac{2m + \sqrt{4m^2 + 4}}{2} = m + \sqrt{m^2 + 1} > 0,\ X_2 = \frac{2m - \sqrt{4m^2 + 4}}{2} = m - \sqrt{m^2 + 1} < 0.$$

On revient à e^x : on ne peut avoir $e^x = X_2$ il reste simplement $e^x = m + \sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(m + \sqrt{m^2 + 1}\right)$.

b. Avec la première manière on le fait à la calculatrice et on trouve 1,82. La deuxième méthode donne $\ln(3 + \sqrt{10})$.

1. 22. Exp, équation, suite réc, Am. du Sud, juin 2004

7 points

Soit la fonction f définie par $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 10 cm).

Partie A

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. construire Γ.

2. a. Montrer que pour tout réel m de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

b. Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on nomme α et β les solutions, (avec $\alpha < \beta$). Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

c. Résoudre l'équation $f(x) = m$ dans le cas où $m = 0$ et $m = \frac{1}{e}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$ où α est le réel défini à la question A. 2. b.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, déterminer sa limite.

2. On considère la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \ln u_n$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Montrer que $S_n = w_0 - w_{n+1}$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

3. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme v_0, $v_0 > 0$, et pour tout entier n, par $v_{n+1} = v_n e^{-v_n}$. Existe-t-il une valeur de v_0 différente de α telle que, pour tout entier $n \geq 1$, on ait $u_n = v_n$ ؟ Si oui, préciser laquelle.

Correction

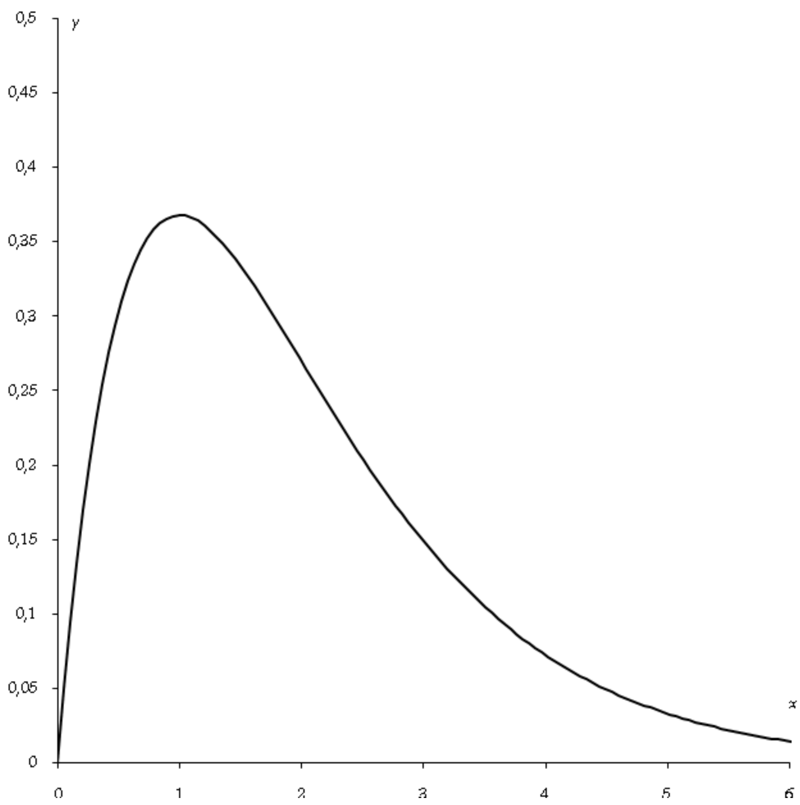
Partie A

1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0$.

b. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. L'ex ponentielle est positive, f' est du signe de $1 - x$.

c.

x	0		1		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0



2. a. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe Γ en deux points, l'équation $f(x) = m$ a donc bien deux solutions. Plus scientifiquement, lorsque m est dans $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, il a deux antécédents par f : un antécédent

entre 0 et 1 car f est croissante et continue de $]0\,;1[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$, l'autre entre 1 et $+\infty$ car f est continue, monotone, décroissante de $]1\,;+\infty[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$.

b. On cherche quand $f(x)$ encadre 1/4 : $f(0{,}3573) = 0{,}2499$ et $f(0{,}3574) = 0{,}25001$.

c. $f(x)=0$ a l'unique solution 0 (tableau de variation) et $f(x)=\frac{1}{e}$ a pour unique solution 1.

Partie B $\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$

a. Comme $u_0 = \alpha > 0$ et que si $u_n > 0$ alors $u_n e^{-u_n} > 0$, il est clair que $u_n > 0$ pour tout n.

b. On peut faire $u_{n+1} - u_n = u_n e^{-u_n} - u_n = u_n(e^{-u_n} - 1)$; or $u_n > 0 \Leftrightarrow -u_n < 0 \Leftrightarrow e^{-u_n} < 1 \Leftrightarrow e^{-u_n} - 1 < 0$ donc la suite (u_n) est décroissante.

c. (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc. Soit l sa limite, on a $le^{-l} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ e^{-l} = 1 \Leftrightarrow -l = 0 \end{cases}$; la seule possibilité est que $l = 0$.

2. $w_n = \ln u_n$.

a. Prenons le logarithme de $u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \Leftrightarrow \ln u_{n+1} = \ln u_n + \ln e^{-u_n} = \ln u_n - u_n \Leftrightarrow w_{n+1} = w_n - u_n$, soit $u_n = w_n - w_{n+1}$.

b. $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = w_0 - \cancel{w_1} + \cancel{w_1} - \cancel{w_2} + \ldots + \cancel{w_{n-1}} - \cancel{w_n} + \cancel{w_n} - w_{n+1} = w_0 - w_{n+1}$.

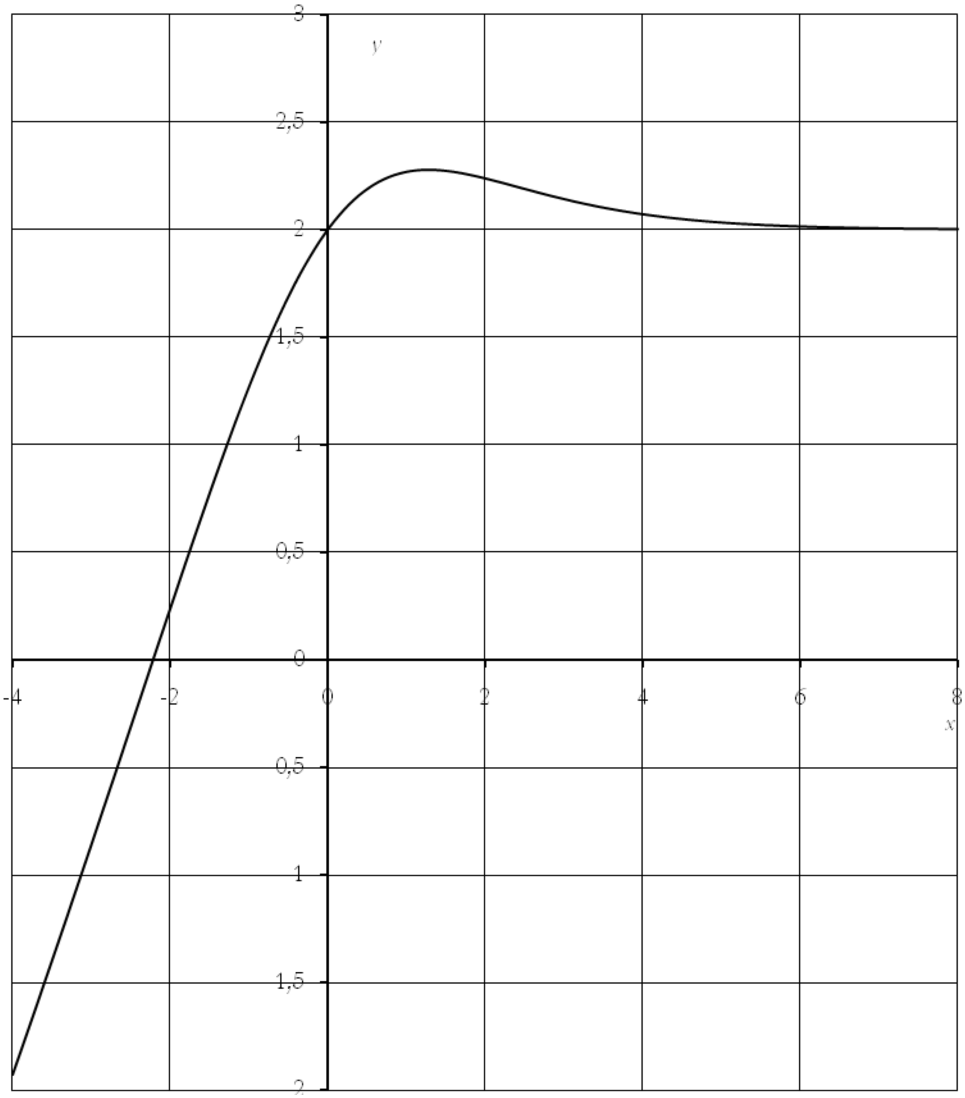
c. Comme u_n tend vers 0, w_n tend vers $-\infty$, donc S_n tend vers $+\infty$.

3. En fait à partir de $u_0 = \alpha$ on a $u_1 = f(\alpha) = \frac{1}{4}$; mais $f(\beta) = \frac{1}{4}$, donc si l'on prend $v_0 = \beta$, à partir du rang 1 les deux suites seront confondues.

<u>1. 23. Exp et aire</u>

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$; cette représentation est fournie ci-dessous.



1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Démontrer que la droite (d) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote pour C_f.

c. Étudier la position de C_f par rapport à (d).

3. Pour tout entier naturel n, tel que $n \geq 2$, on note D_n l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, dont les coordonnées vérifient : $2 \leq x \leq n$ et $2 \leq y \leq f(x)$ et on appelle A_n son aire, exprimée en unités d'aire.

a. Faire apparaître D_5 sur la figure.

b. Démontrer que pour tout x , tel que $x \geq 2$, on a : $\frac{7}{8}xe^{-x} \leq \frac{x}{e^x+1} \leq xe^{-x}$.

c. On pose $I_n = \int_2^n xe^{-x}dx$. À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

d. Écrire un encadrement de A_n en fonction de I_n.

e. On admet que A_n a une limite lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la limite de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Donner une interprétation géométrique de ce dernier résultat.

Correction

1. En $+\infty$, on a $\frac{x}{e^x}=\frac{1}{e^x/x}\to\frac{1}{+\infty}=0$ d'où f tend vers 2. Asymptote horizontale $y=2$.

2. a. En $-\infty$, e^x tend vers 0, f tend vers $-\infty$.

b. $f(x)-(x+2)=\frac{x}{e^x+1}+2-x-2=\frac{x-x\left(e^x+1\right)}{e^x+1}=\frac{xe^x}{e^x+1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$.

(d) est une asymptote pour C_f en $-\infty$.

c. Le signe de $f(x)-(x+2)=\frac{xe^x}{e^x+1}$ est celui de x, donc lorsque x est positif, C_f est au dessus de (d), lorsque x est négatif C_f est en dessous de (d).

3. a. C'est la zone comprise entre la courbe, les droites $x = 2$, $x = 5$ et $y = 2$.

b. Comme $e^x+1>e^x$, on a $\frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{e^x}\Leftrightarrow\frac{x}{e^x+1}<\frac{x}{e^x}=xe^{-x}$; pour l'inégalité de gauche, dvisons par x :

$$\frac{7}{8}e^{-x}\le\frac{1}{e^x+1}\Leftrightarrow\frac{7}{8}e^{-x}\left(e^x+1\right)\le1\Leftrightarrow\frac{7}{8}+\frac{7}{8}e^{-x}\le1\Leftrightarrow\frac{7}{8}e^{-x}\le\frac{1}{8}\Leftrightarrow e^{-x}\le\frac{1}{7}\Leftrightarrow -x\le-\ln7\Leftrightarrow x\ge\ln7.$$

Or $x\ge2$, c'est donc vrai.

c. $I_n=\int_2^n xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_2^n-\int_2^n -e^{-x}dx=\left[-xe^{-x}-e^{-x}\right]_2^n=-(n+1)e^{-n}+3e^{-2}$.

d. On a $A_n=\int_2^n\left[f(x)-2\right]dx=\int_2^n\frac{x}{e^{x+1}}dx\Rightarrow\int_2^n\frac{7}{8}xe^{-x}dx\le\int_2^n\frac{x}{e^{x+1}}dx\le\int_2^n xe^{-x}dx\Leftrightarrow\frac{7}{8}I_n\le A_n\le I_n$.

e. Lorsque n tend vers $+\infty$, I_n tend vers $3e^{-2}$ (croissances comparées). Par conséquent la limite de A_n est comprise entre $\frac{7}{8}3e^{-2}$ et $3e^{-2}$. Ceci donne un encadrement de l'aire comprise entre C_f, $x = 2$ et $y = 2$.

1. 24. Caractéristique de Exp et tangentes

1. Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2 cm tracer la courbe représentative (C) de la fonction exponentielle ($x\mapsto e^x$) sur l'intervalle $[-2;2]$.

2. Tracer sur la même figure les tangentes à (C) aux points d'abscisses $x_1=-1$, $x_2=0$ et $x_3=1$. Chacune de ces tangentes coupe l'axe horizontal en un point d'abscisse x_1', x_2', x_3'.

Mesurer **à la règle** les trois distances x_i-x_i', $i = 1, 2, 3$. Que constatez-vous ? (Les trois longueurs mesurées doivent apparaître clairement sur le graphique.)

3. Soit A un point de (C) d'abscisse a. Vérifiez que l'équation de la tangente (T) en A à (C) a pour équation $y=e^ax+(1-a)e^a$. Justifiez alors que le résultat du 2. est bien une constante que l'on précisera par le calcul.

4. On cherche désormais s'il y aurait d'autres courbes présentant cette propriété : soit une fonction f de courbe représentative (C), A un point de (C) d'abscisse a, (T) la tangente en A à (C) et a' l'abscisse du point d'intersection entre (T) et (Ox) quand il existe. On note f' la fonction dérivée de f.

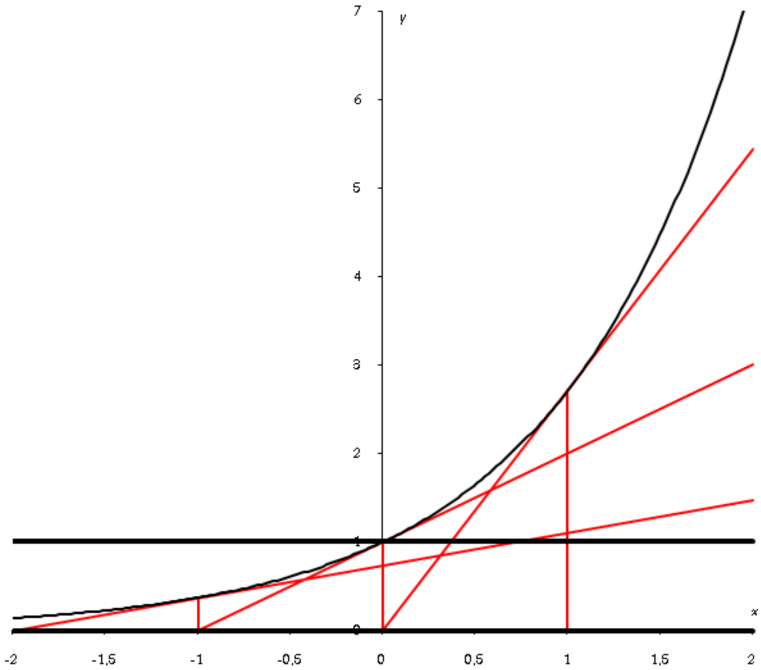
a. Donner l'équation de la tangente (T).

b. Exprimer a' en fonction de a, $f(a)$ et $f'(a)$. En déduire $a-a'$.

c. Soit k une constante réelle. Montrer que $a-a'=k\Leftrightarrow\frac{f(a)}{f'(a)}=k$. Résoudre cette équation et conclure.

Correction

1.



2. Les trois longueurs mesurées valent 1.

3. $f(a)=e^a$, $f'(a)=e^a$; $y=f'(a)(x-a)+f(a)=e^a(x-a)+e^a=e^a x+(1-a)e^a$.

Le point d'intersection entre (C) et (Ox) a pour abscisse x_0 : $e^a x_0+(1-a)e^a=0 \Leftrightarrow x_0=\dfrac{(a-1)e^a}{e^a}=a-1$

d'où la distance entre a et x_0 : $a-x_0=a-(a-1)=1$.

4. a. $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

b. Le point d'intersection entre la tangente et (Ox) a pour abscisse a' :

$$0=f'(a)(a'-a)+f(a) \Leftrightarrow a'-a=-\frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow a-a'=\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

c. On a donc bien $a-a'=k \Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{f'(a)}=k$. En fait il s'agit simplement de l'équation différentielle $y'=\dfrac{1}{k}y$ dont les solutions sont de la forme $f(x)=Ce^{\frac{1}{k}x}$.

Par exemple pour la situation de départ on avait $k=1$ ($f(x)=e^x$) et l'écart mesuré était bien de 1. Ceci caractérise d'ailleurs les fonctions exponentielles.