Les fonctions exponentielles

1 La fonction exponentielle népérienne

Définition :

La réciproque de la fonction ln s'appelle La fonction exponentielle népérienne notée exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Autre expression de exp :

Soient $r \in \mathbb{Q}$ et $a \in]0, +\infty[$, On a : $\exp(r) = a \Leftrightarrow r = \ln(a) \Leftrightarrow \ln(e^r) = \ln(a) \Leftrightarrow a = e^r$.
Donc $\exp(r) = e^r$ pour tout r de $\mathbb{Q}$. On prolonge cette expression à $\mathbb{R}$ et on aura :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \exp(x) = e^x}$$

Propriétés :

⋆ La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
⋆ $e^1 = e$ $\qquad e^0 = 1 \qquad e^x > 0$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.
⋆ $(\forall x \in \mathbb{R}) : \ln(e^x) = x \qquad (\forall x \in]0, +\infty[) : e^{\ln(x)} = x$

⋆ $\begin{cases} e^x = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(y) \\ y \in]0, +\infty[\end{cases}$

⋆ Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :

$$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y \qquad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$$

$$e^x \times e^y = e^{x+y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad e^{rx} = (e^x)^r$$

⋆ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $a \in]0, +\infty[$, on a :

$$e^x > a \Leftrightarrow x > \ln(a) \qquad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln(a)$$

Proposition :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ , \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

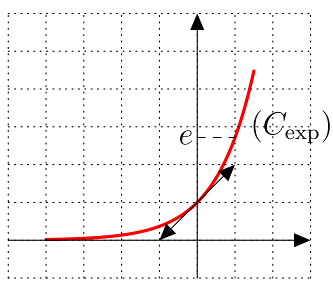
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} x^n e^x = 0 \ , \ (\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Proposition :

⋆ La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.
⋆ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(e^u)'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, $(\forall x \in I)$.

T.v et $(C_{\exp})$:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$



$\boxed{2}$ L'exponentielle à base a $(a > 0 eta \neq 1)$

Définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.
L'exponentielle à base a est la fonction $\exp_a \ : \ x \mapsto e^{x\ln(a)} = a^x$ et on a :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ \exp_a(x) = e^{x\ln(a)} = a^x$$

Propriétés :

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a :

$\star$ $\quad a^x \times a^y = a^{x+y} \qquad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \qquad a^{xy} = (a^x)^y \qquad a^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$\star$ La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}) \ : \ (a^x)' = \ln(a)a^x$.

$\star$ $\begin{cases} a^x < a^y \Leftrightarrow x > y & , 0 < a < 1 \\ a^x < a^y \Leftrightarrow x < y & , a > 1 \end{cases}$

$\star$

$0 < a < 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$-$	
a^x	$+\infty$ ↘	0

$a > 1$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\ln(a)a^x$	$+$	
a^x	0 ↗	$+\infty$

$a = \dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $a = 2$