FONCTIONS EXPONENTIELLES

I) LA FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1) Définition et propriétés :

Approche :

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $ln(]0,+\infty[) =]\lim_{x\to 0^+} lnx; \lim_{x\to+\infty} lnx[= \mathbb{R}$ donc :

Propriété et définition :

La fonction ln admet une fonction réciproque définie de $]-\infty,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$ appelée **fonction exponentielle népérienne** notée : exp

Propriétés immédiates :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(exp(x)) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(exp(ln(x)) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\forall y \in \mathbb{R})(ln(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y))$
- $exp(0) = 1 \;\; ; \quad exp(1) = e$

Propriété : (monotonie)

La fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Résultat :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(exp(x) \leq exp(y) \Leftrightarrow x \leq y)$

Exercice :

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

❶ $exp(2x^2 - x) = exp(1 - 3x)$ ❷ $exp(2x^2 - x) \leq exp(1 - 3x)$

❸ $ln(2x^2 + x - 3) = 5$ ❹ $ln(2x^2 + x - 3) < 5$

2) l'écriture : e^x.

Propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall r \in \mathbb{Q})\left(exp(rx) = \left(exp(x)\right)^r\right)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} ln\left(\left(exp(x)\right)^r\right) &= rln(exp(x)) \\ &= rx \\ &= ln(exp(rx)) \end{aligned}$$

Résultat :

- $(\forall r \in \mathbb{Q})\left(exp(r) = \left(exp(1)\right)^r = e^r\right)$
- On peut prolonger la propriété précédente à $\mathbb{R}$: $(\forall x \in \mathbb{Q})\left(exp(x) = \left(exp(1)\right)^x = e^x\right)$

Propriété algébrique :

Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$ on a :

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{rx} = (e^x)^r \quad (r \in \mathbb{Q})$
- $(\forall x > 0)(e^{lnx} = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(ln(e^x) = x)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(e^x = y \Leftrightarrow x = ln(x))$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x = e^y \Leftrightarrow x = y)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y)$

Applications :

Exercice 1 :

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

1- $\frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{1+e^{-x}}$

2- $\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^x-e^{-x}}$

3- $\frac{e^x+1}{e^x-1} = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$

Exercice 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

(E_1): $5e^{3x} - 2e^{2x} - 3e^x = 0$

(E_2): $e^{-x} - 2e^x + 1 = 0$

(E_3): $exp(3x+14) \leq \frac{3}{2}$

(E_4): $e^{-x} - 2e^x + 1 > 0$

Propriété : (limites usuelles)

① $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$ ⑦ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0.$

Preuve : (En exercice)

Exercice : Déterminer les limites suivantes :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x}$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x+e^{-2x}}{e^x+x}$ ③ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{e^x-1}$

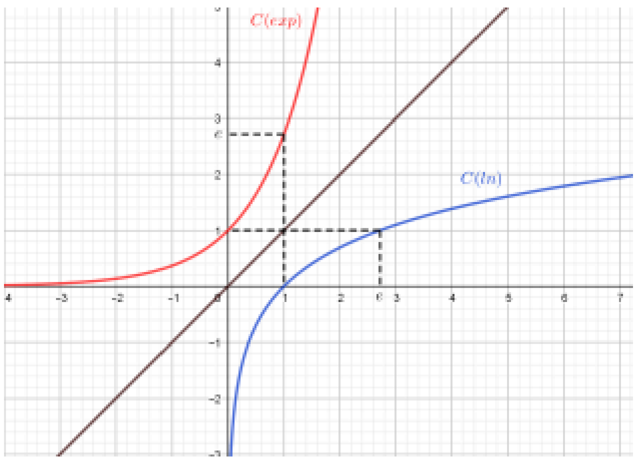
④ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x+1}-e}{x}$ ⑤ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1-3e^x}{e^x-1}$ ⑥ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2e^{(5x+1)}$

3) Représentation de la fonction exp

La fonction exp est strictement monotone sur $\mathbb{R}$

Car l'exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est strictement monotone sur $]0, +\infty[$

Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $(\Delta): y = x$



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0	1	e	$+\infty$

4) Dérivation de la fonction exp

On sait que la fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et on sait que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \left(ln'x = \frac{1}{x}\right)$

Donc la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R} = ln(]0, +\infty[)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ on a :
$$\begin{aligned} exp'(x) &= (ln^{-1})'(x) \\ &= \frac{1}{ln'(\exp(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{exp(x)}} \\ &= exp(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Propriété :

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'(x) = exp(x))$

Corolaire :

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $exp(u(x))$ est dérivable sur I et

$(\forall x \in I)(\exp(u(x)))' = u'(x)\, exp(u(x))$

Application :

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

- $f(x) = 3x^2 e^{-x}$
- $g(x) = e^{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}$
- $h(x) = \frac{e^{-x}}{e^{2x}+x}$

Exercice :

Partie 1

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = (x+2)e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
2. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. Déterminer la limite en $+\infty$

4. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f puis dresser le tableau de variation de f.
5. a) Montrer que $(\forall t > 0)\left(0 < e^{-t} + t - 1 < \frac{t^2}{2}\right)$

   b) En déduire que : $(\forall x > 0)\left(\frac{-4}{x} < f(x) - x < \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}\right)$

   c) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$
6. Construire la courbe C_f.

Partie 2 :

Considérons la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\left(\frac{-2}{x}\right)} & \text{si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

1. a) Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f_n à droite de 0.

   b) Déterminer la limite en $+\infty$

   c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f_n puis dresser le tableau de variation de f_n.
2. Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans $]0, +\infty[$
3. a) Montrer que $(\forall x > 0)\left(f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}\right)$

   b) En déduire la monotonie de $(\alpha_n)_n$

   c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_n$ est convergente et que $\lim \alpha_n = 0$.

II) LA FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a.

1) Définition et résultats :

Propriété et définition :

Soit a un réel strictement positif et différent de 1. La fonction log_a étant continue et strictement monotone sur $]0, +\infty[$, elle admet donc une fonction réciproque de $\mathbb{R} = log_a(]0, +\infty[)$ vers $]0, +\infty[$.

Cette fonction réciproque s'appelle la fonction exponentielle de base a et se note exp_a

Résultats immédiats :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$

- La fonction exp_a est définie sur $\mathbb{R}$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a(x) > 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})(\, exp_a(x) = y \Leftrightarrow x = log_a(x)\,)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(log_a(exp_a(x)) = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(exp_a(log_a(x)) = x$

2) Une autre écriture de la fonction exp_a

Propriété :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp_a(x) = e^{xln(a)})$

Preuve :

Posons : $y = exp_a(x)$ on a donc $y > 0$ et $x = log_a(y) = \frac{ln(y)}{ln(a)}$

D'où : $l\,n(y) = x.ln(a)$; finalement $y = e^{xln(a)}$ d'où la propriété.

Propriété :

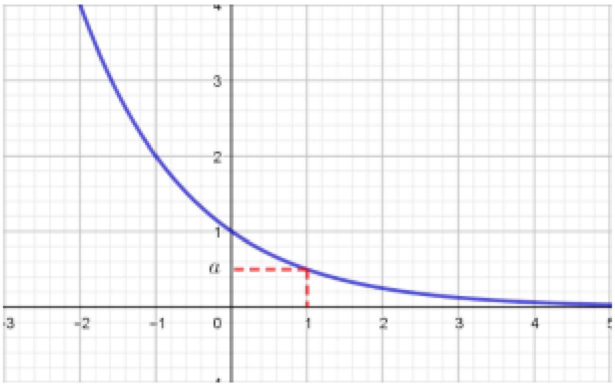
exp_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) = ln(a)e^{xln(a)}\,)$

Monotonie et représentation :

Si $0 < a < 1$:
On a $ln(a) < 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) < 0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

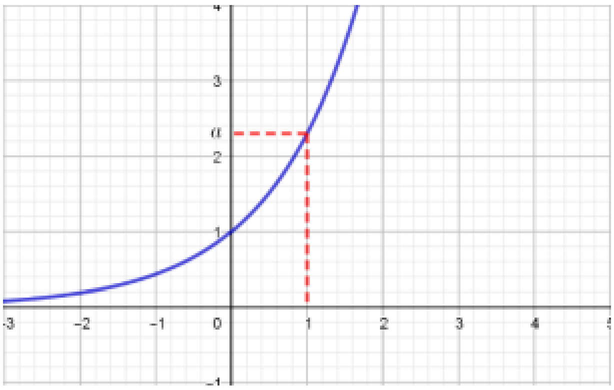
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$exp'_a(x)$		$-$		$-$		$-$	
$exp_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	a	$\searrow$	0



Si $0 < a < 1$:
On a $ln(a) > 0$ et par suite : $(\forall x \in \mathbb{R})(exp'_a(x) > 0)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$exp'_a(x)$		$+$		$+$		$+$	
$exp_a(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$



Propriété caractéristique :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$; on a : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(exp_a(x+y) = exp_a(x) \times exp_a(y))$.

Conséquences :

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$ et x et y deux réels, on a :

- $exp_a(-x) = \frac{1}{exp_a(x)}$
- $exp_a(x-y) = \frac{exp_a(x)}{exp_a(y)}$
- $exp_a(rx) = \left(exp_a(x)\right)^r$

3) Les puissances réelles.

Rappelle :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^*)(x^0 = 1)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x^n = \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{n\,fois}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(x^{-n} = \frac{1}{x^n}\right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\forall r \in \mathbb{Q})\left(r = \frac{p}{q} \Rightarrow x^r = \sqrt[q]{x^p}\right)$ $(q \in \mathbb{N}^*)$

Puissances réelle : La notation a^x

Soit a un réel strictement positif.

- Si $a = 1$, on pose pour tout réel $x > 0$: $a^x = 1$
- Si $a \neq 1$, on pose $a^x = e^{xln(a)}$

Exercice 1:

Soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$\begin{cases} x \mapsto x^x & ,\text{si } x \neq 0 \\ 0 \mapsto 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de la fonction f à droite de 0.
2. Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
5. Tracer la courbe C_f.
6. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$
7. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = \frac{1}{e}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$.
   a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq 1)$
   b. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$; puis en déduire qu'elle convergente.
   c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 2 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; considérons la fonction f_n définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(\ln(x))^n}{x^2}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Donner le tableau de variation de f_1.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T_1) à la courbe C_1 en point d'abscisse 1.
3. Construire la courbe C_1 et la tangente (T_1) dans le repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
4. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
5. a) Etudier sur l'intervalle $[1, +\infty[$ le signe de $f_2(x) - f_1(x)$

   b) En déduire les positions relative des deux courbes C_1 et C_2 ; puis construire C_2
6. Considérons la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ où u_n est la valeur maximale de la fonction f_n.
   a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{2e}\right)^n\right)$
   b) Pour $x \in]1, +\infty[$; calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$
   c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_{n+1} = \frac{1}{2}f_n\left(e^{\frac{n+1}{2}}\right)\right)$
   d) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left(u_n \leq \frac{1}{e}\frac{1}{2^n}\right)$; En déduire $lim\, u_n$.

Exercice 3 :

Partie 1

1. En utilisant le T.A.F sur la fonction $t \to e^{-t}$; montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\exists \theta \in \mathbb{R}^{*+})\left(e^{\theta} = \frac{x}{1-e^{-x}}\right)$
2. En déduire que : $(\forall x > 0)(1 - x < e^{-x})$ et que $(\forall x > 0)(1 + x < e^{x})$
3. En déduire que : $(\forall x > 0)\left(0 < ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) < x\right)$

Partie 2

Considérons la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{xe^x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$ et étudier la branche infinie de la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
3. a)Montrer que $(\forall x > 0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < e^{-x} + x - 1 < \frac{x^2}{2}\right)$

   b) Montrer que $(\forall x > 0)\left(\frac{f(x)-1}{x} = \frac{e^{-x}+x-1}{x^2} . f(x)\right)$

   c) En déduire que f est dérivable à droite de 0 et donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.
4. a) Montrer que : $(\forall x > 0)\left(f'(x) = \frac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}\right)$

   b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

   c) Construire la courbe C_f.

   d) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ vers $J = f([0, +\infty[)$.

__Partie 3 :__

Considérons la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 \in]0, +\infty[$ et $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = ln(f(u_n)))$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement positive,
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$strictement décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3. a) Montrer que l'équation $ln(f(x)) = x$ admet 0 comme seule solution.

   b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$