

Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^3 (\ln x)^4, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+3\sqrt{x})}{\ln(1+2x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x \ln(x+1)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations ci-dessous

$$1) \quad 2\ln(x-2) - \ln(x+3) = 0, \quad (\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0, \quad (\ln x)^3 - \ln x = 0$$

$$2) \quad \ln(x^2 - x) + \ln\left(\frac{1}{3x+4}\right) < 0, \quad \ln x - 2 \geq \frac{4}{\ln x}, \quad \ln x > -1 + \ln 2$$

Exercice 3

$$1) \text{ montrer que } (\forall x \in]0, +\infty[) \ln(1+x) \leq x \leq (x+1) \ln(1+x)$$

$$2) \text{ a) montrer que : } \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq e^n \leq \prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$\text{b) en déduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$$

Exercice 4

$$1) \text{ a) montrer que } (\forall t \in]0, +\infty[) \ln t \leq t - 1$$

$$\text{b) en déduire que } (\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad x \ln x \geq x - 1$$

$$2) \text{ montrer que } (\forall x \in [1, +\infty[) \quad x \ln x \leq \frac{1}{2}(x^2 - 1)$$

$$3) \text{ soit } f \text{ la fonction définie sur }]0, +\infty[\text{ par : } f(x) = x \ln x$$

$$\text{a) étudier le sens de variation de } f \text{ puis dresser le tableau de variations}$$

$$\text{b) soit } n \text{ de } \mathbb{N}^* \text{ montrer que l'équation } f(x) = \frac{1}{n} \text{ admet une seule solution } a_n \text{ et } 1 < a_n < e$$

$$\text{c) étudier la monotonie de } (a_n)_{n \geq 1} \text{ et déduire qu'elle est convergente}$$

$$\text{d) montrer que } (\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{1 + \frac{2}{n}} \leq a_n \leq 1 + \frac{1}{n} \text{ puis calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

Exercice 5

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^2 - 2n \ln x$$

$$1) \text{ a) calculer les limites } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_n(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$\text{b) étudier les variations de } f_n \text{ et donner le tableau de variations}$$

$$2) \text{ montrer que } f_n(x) = 0 \text{ admet deux solutions } u_n \text{ et } v_n \text{ telles que } u_n < \sqrt{n} < v_n$$

$$3) \text{ calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ puis montrer que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(v_n)}{\ln(2n)} = \frac{1}{2}$$

$$4) \text{ a) montrer que } (\forall n \geq 3) \quad u_n \geq 1$$

$$\text{b) vérifier que } f_{n+1}(u_n) = -\ln u_n \text{ en déduire que } (u_n)_n \text{ est convergente}$$

$$\text{c) montrer que } (\forall n \geq 3) \quad u_n \leq e^{\frac{3}{2n}} \text{ en déduire la limite de } (u_n)_n$$

Exercice 6

1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad \ln x \leq x - 1$

2) soit n de $\mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. $x_1; x_2; \dots; x_n$ و $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n$ des réels de $\mathbb{R}^{*+}$

Tels que $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ on pose $y = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$

a) Montrer que pour tout k de $\{1; 2; \dots; n\}$ on a : $\alpha_k \ln \left(\frac{x_k}{y} \right) \leq \frac{\alpha_k x_k}{y} - \alpha_k$

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln(x_k) \leq \ln \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right)$

c) Montrer que : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k) \leq \ln \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \right)$

d) Prouver que $\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

e) Montrer que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n$

En déduire que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ pour tous $x_1; x_2; \dots; x_n$ de $\mathbb{R}^{*+}$

Exercice 7

1) montrer que $(\forall x > 0) \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

2) on pose $U_n = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$ pour tout entier naturel n non nul

a) calculer U_1 ; U_2

b) montrer que $(U_n)_n$ est convergente (on donne $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

3) on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right)$ pour n de $\mathbb{N}^*$.

montrer que $(V_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 8

Soit x de $]0, +\infty[$ on considère la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = x^2(\ln(1+t) - t) - t^2(\ln(1+x) - x)$$

1) montrer que φ vérifie les conditions de Rolle sur $[0, x]$

2) en déduire qu'il existe un réel c tel que $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2(1+c)}$

3) déduire que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

4) déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$