Cours *FONCTIONS LOGARITHMIQUES*

PROF : ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

FONCTIONS LOGARITHMIQUES

I) LA FONCTION LOGARITHME NEPERIENNE

1) Existence :

Activité : Le but de cette activité est de montrer l'existence d'une fonction f non nulle qui vérifie les deux conditions suivantes :

(1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

(2) $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})(f(x\times y)=f(x)+f(y))$

1) Déterminons $f(1)$:

D'après (2) en prenant $x=y=1$ on obtient :

$f(1)=2f(1)$ donc $f(1)=0$.

2) Déterminons l'existence d'un réel k tel que :

$(\forall x\in]0,+\infty[)\ (f'(x)=\frac{k}{x})$.

Pour tous x et y dans $]0,+\infty[$

on pose : $g_x(y)=f(x\times y)$ et $h_x(y)=f(x)+f(y)$;

on a : g_x et h_x sont dérivable sur $]0,+\infty[$ et :

$(\forall y\in]0,+\infty[)(g_x'(y)=xf'(xy)$ et $h_x'(y)=f'(y)$

($f(x)$ es une constante pour y)

et puisque : $(\forall y\in]0,+\infty[)(g_x'(y)=h_x'(y))$

alors : $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})(xf'(xy)=f'(y))$ pour $y=1$

on trouve : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ (f'(x)=\frac{f'(1)}{x})$

Donc la fonction qui vérifie les conditions est la fonction primitive de la fonction $\frac{f'(1)}{x}$ et qui s'annule en 1

Inversement :

Considérons la fonction primitive f de $x\to\frac{k}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; montrons que f vérifie les deux conditions

On a : f est dérivable $]0,+\infty[$ (Définition de la fonction primitive).

Considérons les fonctions :

$u_y(x)=f(x\times y)$ et $v_y(x)=f(x)+f(y)$

on a u_y et v_y sont dérivable sur $]0,+\infty[$:

$\forall x>0;\ \forall y>0$: $u_y'(x)=yf'(x\times y)$ et $v_y'(x)=f'(x)$

et on a : $u_y'(x)=y\frac{k}{xy}=\frac{k}{x}=f'(x)=v_y'(x)$

donc : $\forall x>0;\ \forall y>0\ u_y(x)=v_y(x)+c$

Pour $x=y=1$ on aura : $v(1)=u(1)+c$ et puisque $u(1)=v(1)$ alors $c=0$.

D'où : $\forall x>0;\ \forall y>0\ u_y(x)=v_y(x)$

c-à-dire $\forall x>0;\ \forall y>0$ on a : $f(xy)=f(x)+f(y)$.

Propriété : Les fonctions non nulles f qui vérifient les deux conditions suivantes :

(1) f est dérivable sur $]0,+\infty[$

(2) $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^{*2})(f(x\times y)=f(x)+f(y))$

sont les fonctions primitive de la fonction $x\to\frac{k}{x}$

Sur $]0,+\infty[$ et qui s'annulent en 1.

2) Fonction logarithme Népérienne

2.1 Définition et propriétés algébrique :

Définition : La fonction logarithme népérienne est la fonction primitive de la fonction $x\to\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$ et qui s'annule en 1 ; on la note par ln.

Conséquences immédiates :

1) ln est définie sur $]0,+\infty[$

2) $f(x)=ln(u(x))$ est définie si et seulement si $u(x)>0$

3) $ln(1)=0$

4) ln est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $(x\in]0,+\infty[)\ (\ln x)'=\frac{1}{x}$

Monotonie : On a : $(x\in]0,+\infty[)\ (\ln x)'=\frac{1}{x}\succ 0$

Donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ on a donc 1) $ln(a)=ln(b)\Leftrightarrow a=b$

2) $ln(a)\le ln(b)\Leftrightarrow a\le b$

Applications1 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f : x \to ln(x+1)$ 2) $g : x \to ln(x^2 - 3x + 2)$

3) $h : x \to \frac{x}{\ln x}$ 4) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$ 6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

solution :1) $f(x) = ln(x+1)$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+1 > 0\}$

$x+1>0 \Leftrightarrow x > -1$ donc : $D_f =]-1, +\infty[$

2) $g(x) = ln(x^2 - 3x + 2)$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 > 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{3+1}{2\times1} = \frac{4}{2} = 2$ **et** $x_2 = \frac{3-1}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x2-3x+2$		+	0	−	0	+	

Donc : $D_g =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$

3) $h(x) = \frac{x}{\ln x}$ $D_h = \{x \in \mathbb{R} / x > 0 et \ln x \neq 0\}$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$ donc : $D_h =]0;1[\cup]1; +\infty[$

5) $k : x \to \ln x + ln(x-1)$

La fonction est définie ssi $x > 0$ et $x - 1 > 0$ cad

$x > 0$ et $x > 1$donc : $D_k =]1; +\infty[$

6) $m : x \to ln\left(\frac{x-4}{x+1}\right)$

La fonction est définie ssi $\frac{x-4}{x+1} > 0$ et $x+1>0$

On utilisant le tableau de signe on trouve :

$D_m =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

Applications2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :1) $ln(x-2) = 0$

2) $ln(3x-1) = ln(5x-10)$ 3) $ln(2x-1) - ln(1-x) = 0$

4) $ln(2x) = ln(x^2+1)$ 5) $ln(2x-6) \geq 0$

6) $ln(x-1) - ln(3x+1) < 0$

Solution :1) $ln(x-2) = 0$

a)cette équation est définie ssi : $x - 2 > 0$

$x-2>0 \Leftrightarrow x > 2$ donc : $D_E =]2; +\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(x-2) = 0 \Leftrightarrow ln(x-2) = ln(1) \Leftrightarrow x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3 \Leftrightarrow \in D_E$

Donc : $S = \{3\}$

2) $ln(3x-1) = ln(5x-10)$

a) cette équation est définie ssi : $5x - 10 > 0$ et

$3x-1>0$ cad $x > 2$ et $x > \frac{1}{3}$ donc : $D_E =]2; +\infty[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(3x-1) = ln(5x-10) \Leftrightarrow 3x - 1 = 5x - 10 \Leftrightarrow -2x = -9$

Donc : $\Leftrightarrow x = \frac{9}{2} \in D_E$ donc : $S = \left\{\frac{9}{2}\right\}$

3) $ln(2x-1) - ln(1-x) = 0$

a)cette équation est définie ssi : $2x - 1 > 0$ et

$1 - x > 0$ cad $x > \frac{1}{2}$ et $x < 1$

donc : $D_E = \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(2x-1) - ln(1-x) = 0 \Leftrightarrow ln(2x-1) = ln(1-x)$

$2x - 1 = 1 - x \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \in D_E$

Donc : $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

4) $ln(2x) = ln(x^2+1)$

a)cette équation est définie ssi : $2x > 0$ et

$x^2 + 1 > 0$ cad $x > 0$ donc : $D_E =]0; +\infty[$

$$ln(2x)=ln(x^2+1)\Leftrightarrow 2x=x^2+1\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1\in D_E$ Donc : $S=\{1\}$

5) $ln(2x-6)\geq 0$

a) cette équation est définie ssi : $2x-6>0$

$2x-6>0\Leftrightarrow x>3$ Donc : $D_E=]3;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$$ln(2x-6)\geq 0\Leftrightarrow ln(2x-6)\geq \ln 1\Leftrightarrow 2x-6\geq 1$$

$$\Leftrightarrow x\geq \frac{7}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$$

donc : $S=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[\cap]3;+\infty[=\left[\frac{7}{2};+\infty\right[$

6) $ln(x-1)-ln(3x+1)<0$

a) cette équation est définie ssi : $x-1>0$ et

$3x+1>0$ cad $\left(x>-\frac{1}{3};x>1\right)$ donc $D_I=]1;+\infty[$

b) Résoudre l'inéquation :

$ln(x-1)-ln(3x+1)<0\Leftrightarrow ln(x-1)<ln(3x+1)$

$x-1<3x+1\Leftrightarrow 2x>-2\Leftrightarrow x>-1$

Donc : $S=]-1;+\infty[\cap]1;+\infty[$ donc : $S=]1;+\infty[$

La propriété caractéristique :

$(\forall x>0;\ \forall y>0)(ln(x\times y)=ln(x)+ln(y))$

Règles de calculs :

- $(\forall x>0)(ln\left(\frac{1}{x}\right)=-ln(x))$
- $(\forall x>0;\ \forall y>0)\ (ln\ (xy)=ln(x)-ln(y))$
- $(\forall x>0;\ \forall r\in\mathbb{Q})(ln(x^r)=r\ ln(x))$
- $(\forall a>0)\ ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}lna$
- $(\forall a>0)\ ln\sqrt[n]{a}=\frac{1}{n}lna\quad \forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

Exemples : On pose $l\,n(2)\simeq 0,7$ et $l\,n(3)\simeq 1,1$

Calculer: $l\,n(6)$; $l\,n(4)$; $l\,n(8)$; $l\,n(72)$

$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)$; $l\,n\left(\frac{3}{2}\right)$; $l\,n(\sqrt{2})$; $l\,n(\sqrt{6})$; $l\,n(3\sqrt{2})$

$ln(12\sqrt[3]{3})$; $A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}$;

$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}$ et $C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2019}$

Solution :

$$l\,n(6)=l\,n(2\times 3)=l\,n(2)+l\,n(3)\simeq 0,7+1,1\simeq 1,8$$

$$l\,n(4)=l\,n(2\times 2)=l\,n(2^2)=2l\,n(2)\simeq 2\times 0,7\simeq 1,4$$

$$l\,n(8)=l\,n(2\times 2\times 2)=l\,n(2^3)=3l\,n(2)\simeq 3\times 0,7\simeq 2,1$$

$$l\,n(72)=l\,n(3^2\times 2^3)=l\,n(3^2)+l\,n(2^3)=2l\,n(3)+3l\,n(2)$$

$$l\,n(72)\simeq 2\times 1,1+3\times 0,7\simeq 2,2+2,1\simeq 4,3$$

$$l\,n\left(\frac{3}{2}\right)=l\,n(3)-l\,n(2)\simeq 1,1-0,7\simeq 0,4$$

$$l\,n\left(\frac{1}{2}\right)=-l\,n(2)\simeq -0,7$$

$$l\,n(\sqrt{6})=\frac{1}{2}l\,n(6)\simeq\frac{1}{2}\times 1,8\simeq 0,9$$

$$\ln(3\sqrt{2})=\ln(3)+\ln(\sqrt{2})\simeq 1,1+\frac{1}{2}\ln(2)\simeq 1,1+\frac{0,7}{2}\simeq 1,1+0,35\simeq 1,45$$

$$ln(12\sqrt[3]{3})=ln(3\times 2^2)+ln(\sqrt[3]{3})=ln(3)+2ln(2)+ln\left(3^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$ln(12\sqrt[3]{3})=ln(3)+2ln(2)+\frac{1}{3}ln(3)\simeq 1,1+1,4+\frac{1}{3}\times 1,1\simeq 2,86$$

$$A=ln\sqrt{2+\sqrt{2}}+ln\sqrt{2-\sqrt{2}}=ln\left(\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right)=ln\left(\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)$$

$$A=ln\left(\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}\right)=ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}ln2\simeq 0,35$$

$$B=\frac{1}{4}ln81+ln\sqrt{3}-ln\frac{1}{27}=\frac{1}{4}ln3^4+\frac{1}{2}ln3-ln\frac{1}{3^3}=\frac{4}{4}ln3+\frac{1}{2}ln3+3ln3$$

$$B\simeq 1,1+\frac{1,1}{2}+3\times 1,1\simeq 4,95$$

$$C=ln(\sqrt{2}+1)^{2015}+ln(\sqrt{2}-1)^{2019}=ln\left((\sqrt{2}+1)^{2019}\times(\sqrt{2}-1)^{2019}\right)$$

$$C=ln\left((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)\right)^{2019}=ln\left((\sqrt{2})^2-1^2\right)^{2019}=2019ln(1)=2019\times 0=0$$

Exercice1 : On pose $\alpha=ln(a)$ et $\beta=ln(b)$

Calculer en fonction de α et β les réels suivants :

$\ln(a^2b^5)$ et $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}$

Solution :

$$\ln(a^2b^5)=\ln(a^2)+\ln(b^5)=2\ln a+5\ln b=2\alpha+5\beta$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)=\ln\left(a^{-\frac{7}{6}}b^{-\frac{1}{6}}\right)=\ln a^{-\frac{7}{6}}+\ln b^{-\frac{1}{6}}=-\frac{7}{6}\ln a-\frac{1}{6}\ln b$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a^7b}}\right)=-\frac{7}{6}\alpha-\frac{1}{6}\beta$$

2.2 Etude et représentation :

D'après la définition de la fonction ln on peut conclure que :

2.2.1) ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur]0, +∞[

2.2.2) ***Déterminons des limites référentielles :***

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=?$

Soit A un réel strictement positif. Comme la fonction ln est strictement croissante sur]0; +∞[et que ln (1) = 0 alors : ln (2) est un réel strictement positif. Par conséquent, le quotient : $\frac{A}{\ln 2}$ est un réel strictement positif.

On appelle n le plus petit entier naturel tel que : $n\geq\frac{A}{\ln 2}$ (il suffit de prendre $n = E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$)

On multiplie par ln 2 qui est positif on aura : $n\ ln2 \geq A \Leftrightarrow ln(2^n) \geq A$

Comme ln est une fonction croissante, alors pour tout x tel que $x \geq 2^n$ nous avons : $lnx \geq n\ ln2 \geq A$

Donc $(\forall A > 0)(\exists B > 0)(x \geq B \Rightarrow lnx > A)$:

$(B = ln2^n$ où $= E\left(\frac{A}{\ln 2}\right) + 1$) Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty}$

b)Déterminons : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

On pose : $t=\frac{1}{x}$ si $x\to0^+$ alors $t\to+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln\frac{1}{t}=-\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=-\infty$

donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty}$

La droite (Δ): x = 0 est une asymptote verticale à la courbe (C_{ln})

c)Déterminons : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=?$

En utilisant leT.A.F de la fonction ln sur $I=\left[1;\sqrt{x}\right]$

On va montrer que : $0\prec\frac{\ln x}{x}\prec\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$

En effet la fonction ln est continue, dérivable sur I

D'après le T.A.F on donc :

$$\ln\sqrt{x}-\ln\sqrt{1}=\frac{1}{c}\left(\sqrt{x}-1\right)\leq\sqrt{x}-1$$

Donc : $\ln x\leq2\left(\sqrt{x}-1\right)$ Donc : $0\prec\frac{\ln x}{x}\leq\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}$

Et puisque on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x}-1\right)}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$

(à vérifier) alors : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0}$

Donc la courbe (C_{ln}) admet une branche parabolique vers l'axe des abscisses au voisinage de +∞

Propriété :1) $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx=+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ *4)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^r}=0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$)

5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^r\ln x=0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$) 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

Preuve : *4)* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$ où (n ∈ ℕ*) **?**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\frac{1}{x^{n-1}}=0\times0=0$ (car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

5) $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0$ *(où n ∈ ℕ*) ?*

Montrons d'abord que : $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0^-$?

On pose $t=\frac{1}{x}$ si $x\to0^+$ alors $t\to+\infty$

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}=\lim_{t\to+\infty}-\frac{\ln t}{t}=0^-$$

$$\lim_{x\to0^+}x^n\ln x=\lim_{x\to0^+}x^{n-1}x\ln x=0\times0=0$$

6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=1$?

La fonction ln étant dérivable en 1 alors :

$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x-\ln1}{x-1}==$ $ln'(1) = 1$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$?

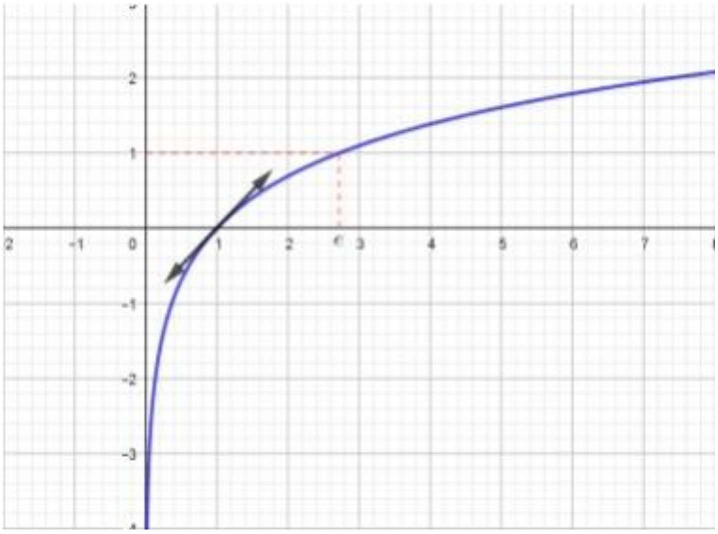
On pose : $t = x + 1$ et on applique : 6)

2.2.3) **Le nombre e :**

La fonction ln est continue strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $ln(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$, donc le réel 1 a un antécédent noté e (le nombre népérien) : $ln(e) = 1$

2.2.4) **Le Tableau de variation et La courbe (C_{ln})** : (C_{ln}) à une tangente en $A(1,0)$:(T): $y = x - 1$

x	0 1 e $+\infty$
$ln'x$	$+$
lnx	$-\infty$ ↗ 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$



Exemple1 : simplifier et calculer :

$$A=\ln\left(e^2\right)+\ln\left(e^4\right)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$B=2\ln\left(\sqrt{e}\right)+\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}\ln\left(e^9\right)$$

Solution :

$$A=\ln\left(e^2\right)+\ln\left(e^4\right)-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e)+4\ln(e)--\ln(e)$$

$$A=2\times1+4\times1--1=7$$

$$B=2\ln\left(\sqrt{e}\right)+\ln\left(e\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}\ln\left(e^9\right)=2\times\frac{1}{2}\ln(e)+\ln e+\ln\left(\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}9\ln(e)$$

$$B=1\ln(e)+\ln e+\frac{1}{2}\ln(e)-3\ln(e)=1+1+\frac{1}{2}-3=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

Exemple2: Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-lnx$ 4) $\lim\limits_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$ 6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\log x$

7) $\lim\limits_{x\to0^+}2x-x^3\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to0^+}x\left(ln(x)\right)^2$ on pose : $X=\sqrt{x}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$ 11) $\lim\limits_{x\to0^+}x^2(\ln x)^5$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln(x)+1}{\ln x}$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln(x)+1=2\times(+\infty)+1=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ donc forme indéterminé(FI)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(2+\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}2+\frac{1}{\ln x}=2+0=2$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln^2(x)-lnx\right)$?

$$\lim_{x\to+\infty}ln^2(x)-lnx=\lim_{x\to+\infty}ln^2(x)-lnx=\lim_{x\to+\infty}lnx\left(ln(x)-1\right)=+\infty$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-lnx$?

$$\lim_{x\to+\infty}x-lnx=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}lnx=+\infty$)

4) $\lim\limits_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx$?

$$\lim_{x\to0^+}ln^2(x)+lnx=\lim_{x\to0^+}lnx\left(ln(x)+1\right)=+\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)+1=-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+lnx\right)$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}+lnx=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+xlnx}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to0^+}xlnx=0$

6) $\lim\limits_{x\to0^+}x^4\log x=0$ car $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0$ *(où $n\in\mathbb{N}^*$)*

7) $\lim_{x\to 0^+} 2x - x^3\ln x = 0$

8) $\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ on pose : $X = \sqrt{x}$

$x\to+\infty \Leftrightarrow X\to 0^+$

$\lim_{x\to+\infty} xln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{0^+}\frac{1}{X}ln(1+X) = \lim_{0^+}\frac{ln(1+X)}{X} = 1$

Car : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

9) $\lim_{x\to 0^+} x\left(ln(x)\right)^2$ on pose : $X = \sqrt{x}$

$X = \sqrt{x} \Leftrightarrow X^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \Leftrightarrow X^2 = x$

$x\to 0^+ \Leftrightarrow X\to 0^+$

$\lim_{x\to 0^+} x\left(ln(x)\right)^2 = \lim_{x\to 0^+} X^2\left(ln\left(X^2\right)\right)^2 = \lim_{x\to 0^+} X^2\left(2lnX\right)^2$

$\lim_{x\to 0^+} x\left(ln(x)\right)^2 = \lim_{x\to 0^+} 4X^2\left(lnX\right)^2$

$\lim_{x\to 0^+} x\left(ln(x)\right)^2 = 4\lim_{x\to 0^+}\left(XlnX\right)^2 = 4\times 0^2 = 0$

Car : $\lim_{x\to 0^+} xlnx = 0^-$

10) $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$? On pose : $f(x) = \frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1}$

$$f(x) = \frac{ln\left(x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)}{x-1} = \frac{lnx^2+ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2lnx+ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1} = \frac{2lnx}{x-1}+\frac{ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$$

$f(x) = 2\frac{\frac{lnx}{x}}{1-\frac{1}{x}}+\frac{ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x-1}$ on a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ et

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = 0$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}\frac{ln\left(x^2+3x\right)}{x-1} = 0$

11) $\lim_{x\to 0^+} x^2\left(\ln x\right)^5 = \lim_{x\to 0^+}\left(x^{\frac{2}{5}}\ln x\right)^5$

On a : $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{5}}\ln x = 0$ donc $\lim_{x\to 0^+} x^2\left(\ln x\right)^5 = 0$

Exercice2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1) $ln(2x-1) = \frac{3}{2}$ 2) $2(\ln x)^2+\ln x-6 = 0$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1 = 0$

4) $\frac{\ln x+3}{\ln x-1} \geq -1$

Solution : 1) $ln(2x-1) = \frac{3}{2}$

a) cette équation est définie ssi :

$2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$ donc : $D_E = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

b) Résoudre l'équation :

$ln(2x-1) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow ln(2x-1) = \frac{3}{2}ln(e)$

$\Leftrightarrow ln(2x-1) = ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right) \Leftrightarrow 2x-1 = e^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow 2x-1 = \left(\sqrt{e}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{\left(\sqrt{e}\right)^3+1}{2} \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

Donc : $S = \left\{\frac{\left(\sqrt{e}\right)^3+1}{2}\right\}$

2) $2(\ln x)^2+\ln x-6 = 0$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$

on pose : $\ln x = X$

on a alors : $2X^2+X-6 = 0$

$\Delta = b^2-4ac = 1+48 = 49>0$

$X_1 = \frac{-1+7}{2\times 4}$ et $X_2 = \frac{-1-7}{2\times 2}$

Donc : $X_1 = \frac{3}{2}$ et $X_2 = -2$

Donc : $\ln x_1 = \frac{3}{2}$ et $\ln x_2 = -2$ donc : $x_1 = e^{\frac{3}{2}}$ et

$x_2 = e^{-2}$ finalement : $S = \left\{e\sqrt{e}, \frac{1}{e^2}\right\}$

3) $3(\ln x)^2+2\ln x-1=0$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$
on pose : $\ln x = X$

on a alors : $3X^2+2X-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=4+12=16>0$

$X_1=\frac{-2+4}{2\times3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ et $X_2=\frac{-2-4}{2\times3}=\frac{-6}{6}=-1$

Donc : $\ln x_1=\frac{1}{3}$ et $\ln x_2=-1$

Donc : $x_1=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$ et $x_2=e^{-1}=\frac{1}{e}$

finalement : $S=\left\{\sqrt[3]{e},\frac{1}{e}\right\}$

4) $\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$ et $\ln x-1\neq 0$
$\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

donc $D_I=]0;e[\cup]e;+\infty[$

$\frac{\ln x+3}{\ln x-1}\geq -1\Leftrightarrow \frac{\ln x+3}{\ln x-1}+1\geq 0\Leftrightarrow 2\frac{\ln x+1}{\ln x-1}\geq 0$

$\ln x+1=0\Leftrightarrow \ln x=-1\Leftrightarrow \ln x=\ln\frac{1}{e}\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

$\ln x-1=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$lnx+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$lnx-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{lnx+1}{lnx-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

$S=(]0;e[\cup]e;+\infty[)\cap\left(\left]0;\frac{1}{e}\right]\cup]e;+\infty[\right)=\left]0;\frac{1}{e}\right]\cup]e;+\infty[$

Exercice3 : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\\2\ln x-\ln y=3\end{cases}$

Solution : $\begin{cases}3\ln x+\ln y=2\rightarrow 1\\2\ln x-\ln y=3\rightarrow 2\end{cases}$ $x\succ 0$ et $y\succ 0$

La somme des deux équations membres à membres donne :

$5\ln x=5\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow \ln x=\ln e\Leftrightarrow x=e$

On remplace $x=e$ dans la première équation
On a donc :

$3\ln e+\ln y=2\Leftrightarrow \ln y=2-3\Leftrightarrow \ln y=-1$

$\Leftrightarrow y=e^{-1}\Leftrightarrow y=\frac{1}{e}$ Donc $S=\left\{\left(e;\frac{1}{e}\right)\right\}$

Exercice4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :1) $lnx+ln(x-1)-ln2=ln3$

2) $ln(2x+5)+ln(x+1)\leq ln4$

3) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

Solution : 1) $lnx+ln(x-1)-ln2=ln3$

a) cette équation est définie ssi : $x>0$ et $x-1>0$

donc : $D_E=]1;+\infty[$

b) $lnx+ln(x-1)-ln2=ln3$

$\Leftrightarrow lnx+ln(x-1)=ln2+ln3\Leftrightarrow ln(x(x-1))=ln6$

Ssi $x(x-1)=6$ ssi $x^2-x-6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times1\times(-6)=1+24=25>0$

$x_1=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1}$ **et** $x_2=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1}$

$x_1=3$ **ou** $x_2=-2\notin]1;+\infty[$ **donc :** $S=\{3\}$

2) $ln(2x-5)+ln(x+1)\leq ln4$

a) cette équation est définie ssi : $x+1>0$ et $2x-5>0$ cad $\left(x>\frac{5}{2} et x>-1\right)$ donc $D_I=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

b)

$ln(2x-5)+ln(x+1)\leq ln4\Leftrightarrow ln((2x-5)(x+1))\leq ln4$

$(2x-5)(x+1)\leq 4\Leftrightarrow 2x^2-3x-9\leq 0$

$\Delta=b^2-4ac=9-4\times2\times(-9)=9+72=81>0$

$x_1=\frac{3+9}{2\times 2}$ et $x_2=\frac{3-9}{2\times 2}$ donc : $x_1=3$ et $x_2=-\frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-3/2$		3		$+\infty$
$2x2-3x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[-\frac{3}{2};3\right]\cap\left]\frac{5}{2};+\infty\right[=\left]\frac{5}{2};3\right]$

3) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

a) cette équation est définie ssi : $14-x>0$ et $10+7x-3x^2>0$ après résolution on trouve : $D_I=\left]-1;\frac{10}{3}\right[$

b) $ln(14-x)\succ ln(10+7x-3x^2)$

$14-x\succ 10+7x-3x^2 \Leftrightarrow 3x^2-8x+4\succ 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(3x-2)\succ 0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc : $S=\left(\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;+\infty\right[\right)\cap\left]-1;\frac{10}{3}\right[$

$S=\left]-1;\frac{2}{3}\right[\cup\left]2;\frac{10}{3}\right[$

Exercice5 : déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1) $f:x\to\frac{ln(x+1)}{ln(\ln x)}$ 2) $g:x\to\sqrt{1-ln(e-x)}$

3) $h:x\to\frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$x+1>0$ et $x>0$ et $\ln x>0$ et $ln(\ln x)\neq 0$

Cad $x>-1$ et $x>0$ et $x>1$ et $\ln x\neq 1$

Cad $x>1$ et $x\neq e$ donc : $D_f=]1;e[\cup]e;+\infty[$

2) cette fonction est définie ssi :

$e-x>0$ et $1\geq ln(e-x)$

Cad $x\prec e$ et $e-x\leq e$ Cad $x\prec e$ et $x\geq 0$

donc : $D_g=[0;e[$

3) $h:x\to\frac{x}{\sqrt{(ln(2x))^2-1}}$

Cette fonction est définie ssi :

$2x>0$ et $(ln(2x))^2-1\succ 0$

Cad $x>0$ et $(ln(2x)-1)(ln(2x)+1)\succ 0$

$ln(2x)+1=0\Leftrightarrow \ln 2x=-1\Leftrightarrow \ln 2x=\ln\frac{1}{e}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2e}$

$ln(2x)-1=0\Leftrightarrow \ln 2x=1\Leftrightarrow \ln 2x=\ln e\Leftrightarrow x=\frac{e}{2}$

x	0		$\frac{1}{2e}$		$\frac{e}{2}$		$+\infty$
$ln2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$ln2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(ln2x+1)(ln2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S=\left]0;\frac{1}{2e}\right]\cup\left[\frac{e}{2};+\infty\right[$

3) Dérivée de la fonction $x\to ln(u(x))$

D'après le théorème de la dérivée de la composition de deux fonctions on peut citer le théorème suivant :

Théorème : Si u est une fonction dérivable sur I et strictement positive sur I alors la fonction / $f(x)=ln(u(x))$ est dérivable sur I

et $(\forall x\in I)$ ($f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$))

Exemple1 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée de la fonction suivante :

$f(x)=\ln(3x^2+5)$

Solution : la fonction $u:x\to 3x^2+5$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a : $3x^2+5\succ 0\quad\forall x\in\mathbb{R}$

alors la fonction : $f:x\to\ln(3x^2+5)$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x)=\frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5}=\frac{6x}{3x^2+5}\quad\forall x\in\mathbb{R}$

Exemple2 : calculer la dérivée des fonctions définies par :1) $f(x)=x^2-\ln x$ 2) $f(x)=x\ln x$

3) $f(x)=\ln(1+x^2)$

Solution :1) $f'(x)=\left(x^2-\ln x\right)'=2x-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-1}{x}$

2) $f'(x)=\left(x\ln x\right)'=x'\ln x+x\ln' x=1\ln x+x\times\frac{1}{x}=\ln x+1$

3) $f'(x)=\left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'=\frac{\left(1+x^2\right)'}{1+x^2}=\frac{2x}{1+x^2}$

Corolaire : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction :
$f(x)=ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I

et $(\forall x\in I)$ $\left(f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

Preuve : (en exercice)
Etudier deux cas $u(x)>0$ sur I et $u(x)<0$ sur I.

Exemple1 : calculer la dérivée de la fonction définie sur $I=]-2;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}$

Solution : $\forall x\in]-2;+\infty[$ on a :

$$\ln(f(x))=\ln\left(\frac{\sqrt[4]{x^3+8}}{\left(x^2+1\right)^3}\right)=\ln\left(\sqrt[4]{x^3+8}\right)-\ln\left(x^2+1\right)^3$$

$$\ln(f(x))=\frac{1}{4}\ln\left(x^3+8\right)-3\ln\left(x^2+1\right)$$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\frac{\left(x^3+8\right)'}{x^3+8}-3\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}$ $\forall x\in]-2;+\infty[$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{4}\frac{3x^2}{x^3+8}-3\frac{2x}{x^2+1}$

Donc : $\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\left(x^3+8\right)\left(x^2+1\right)}$

Donc :

$$f'(x)=\frac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\left(x^3+8\right)\left(x^2+1\right)}f(x)=\frac{-3x\left(7x^3-x+64\right)}{4\sqrt[4]{\left(x^3+8\right)^3}\left(x^2+1\right)^4}$$

Exemple2 : Déterminer le domaine de dérivation et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln\left|\ln|x|\right|$

2) $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

Solution : 1) cette fonction est définie ssi :

$|x|>0$ et $\ln|x|>0$ cad $x\neq 0$ et $|x|>1$

Donc : $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$

$\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=\left(\ln\left|\ln|x|\right|\right)'=\frac{\left(\ln|x|\right)'}{\ln|x|}$

$f'(x)=\left(\ln\left|\ln|x|\right|\right)'=\frac{1}{x\ln|x|}$

2) $f(x)=\ln\left|\sin^2 x+3\sin x+4\right|$

cette fonction est définie ssi : $\sin^2 x+3\sin x+4\succ 0$

on pose : $t=\sin x$ donc : t^2+3t+4
$\Delta=9-16=-7\prec 0$ donc : $t^2+3t+4\succ 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

Alors : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{\left(\sin^2 x+3\sin x+4\right)'}{\sin^2 x+3\sin x+4}=\frac{2\sin x\cos x+3\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+4}$$

Propriété : Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;

$F(x)=l\,n(|u(x)|)+Cte$

Applications : Déterminer les fonctions primitives des fonctions suivantes :

1) $I=\mathbb{R}$; $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}$ 2) $I=]0;1[$; $g(x)=\frac{1}{xlnx}$

3) $I=]-\infty;1[$; $h(x)=\frac{1}{x-1}$ 4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$; $k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$

5) $M(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (Essayer d'écrire $g(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}$ où a et b des réels à déterminer).

6) $N(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}$

7) $I=]3;+\infty[$; $q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

Solution : 1)on a $f(x)=\frac{x^3}{x^4+2}=\frac{1}{4}\frac{(x^4+2)'}{x^4+2}$

Donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln|x^4+2|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x^4+2>0$ donc : $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+k$

2) $f(x)=\frac{1}{xlnx}=\frac{\frac{1}{x}}{lnx}=\frac{(lnx)'}{lnx}$

donc les fonctions primitives sont :

$G(x)=\ln|\ln x|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Puisque : $x\in]0;1[$ donc : $\ln x\prec 0$

Donc : $F(x)=\ln(-\ln x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

3) $I=]-\infty;1[;h(x)=\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)'}{x-1}$ donc les fonctions primitives sont : $H(x)=\ln|x-1|+k$

Puisque : $x\in]-\infty;1[$ donc : $x-1\prec 0$

Donc : $H(x)=\ln(1-x)+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

4) $I=\left]\frac{3\pi}{2};2\pi\right[;k(x)=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}$ donc les fonctions primitives sont : $K(x)=\ln|\sin x|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

5) $m(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$m(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

Donc les fonctions primitives sont :

$$M(x)=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)=\ln\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}+k$$

6) $n(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+2}{x-3}=\frac{(x-3)(x^2+5x+12)+38}{x-3}$

Donc : $n(x)=x^2+5x+12+\frac{38}{x-3}$

Donc les fonctions primitives sont :

$N(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+12x+38\ln|x-3|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

7) $I=]3;+\infty[;q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}$

$$q(x)=\frac{1}{(x-2)\ln(x-2)}=\frac{\frac{1}{(x-2)}}{\ln(x-2)}=\frac{(\ln(x-2))'}{\ln(x-2)}$$

Donc : donc les fonctions primitives sont :

$Q(x)=\ln|\ln(x-2)|+k$ avec $k\in\mathbb{R}$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par : $f(x)=\frac{5x+1}{x^2+x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et Déterminer les réels a et b tels que :

$(\forall x\in D);f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$

2) en déduire la fonction primitive de f sur $]-\infty;-2[$

Tel que $F(-3)=\ln 2$

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x-2\neq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times(-2)\times 1=1+8=9>0$

$x_1=\frac{-1+3}{2\times 1}=\frac{2}{2}=1$ et $x_2=\frac{-1-3}{2\times 1}=\frac{-4}{2}=-2$

Donc : $D_f=\mathbb{R}/\{-2;1\}$

$$f(x)=\frac{a(x+2)+b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{ax+2a+bx-b}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

Donc : $\begin{cases}a+b=5\\2a-b=1\end{cases}$ Donc: $3a=6$ Donc: $a=2$

Donc : $b=3$ Donc: $(\forall x\in D_f);f(x)=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$

2) $(\forall x\in\mathbb{R}/\{-2;1\});f(x)=2\frac{(x-1)'}{x-1}+3\frac{(x+2)'}{x+2}$

$F(x)=2\ln|x-1|+3\ln|x+2|+k$ $k\in\mathbb{R}$

$x\in]-\infty;-2[\Leftrightarrow x<-2$ et $x<1$

Donc : $x+2<0$ et $x-1<0$
Donc : les fonctions primitives sont :

$$F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)+k \quad k\in\mathbb{R}$$

$$F(-3)=\ln 2 \Leftrightarrow 2\ln(4)+3\ln(1)+k=\ln 2$$

$$k=\ln 2-2\ln\left(2^2\right) \Leftrightarrow k=-3\ln 2$$

Donc : $F(x)=2\ln(1-x)+3\ln(-x-2)-3\ln 2$

II) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

1) Définition

Définition : Soit a un réel non nul et différents de 1. La fonction notée par $\log_a$ définie sur]0, +∞[par :($\forall x \in$]0, +∞[) ($\log_a = \frac{\ln x}{\ln a}$) S'appelle :

la fonction logarithmique de base $\boldsymbol{a}$

Exemples : 1)Pour: $a=e$ on aura : $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

2) $\log_2 4 = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 2^2}{\ln 2} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$

2) Propriétés et règles de calcul :

Toutes les propriétés de calcul qu'on a vu concernant la fonction ln restent valables pour la fonction $\log_a$.

a) Propriétés caractéristiques

- $(\forall x>0)(\forall y>0)(Log_a(xy)=Log_a(x)+Log_a(y))$
- $(\forall x>0)\left(Log_a\left(\frac{1}{x}\right)=-Log_a(x)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall y>0)\left(Log_a\left(\frac{x}{y}\right)=Log_a(x)-Log_a(y)\right)$
- $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(Log_a(x^r)=rLog_a(x))$

Preuve : Pour démontrer les propriétés précédentes il suffit d'utiliser la définition de la fonction $\log_a$ et les propriétés de la Fonction ln

b) Propriétés : La fonction $\log_a$ est une bijection de]0, +∞[vers $\mathbb{R}$

1) $(\forall x>0)(\forall y>0)$($\log_a(x)=\log_a(y) \Leftrightarrow x=y$)

2) $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})$($\log_a(x)=r \Leftrightarrow x=a^r$

c)Propriété : La fonction $\log_a$ est continue dérivable sur]0, +∞[et ($\forall x \in$]0, +∞[)

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln a}$$

Preuve : (En exercice)

2)Etude et représentation de $\log_a$:

Soit a un réel strictement positif et différent de 1 :

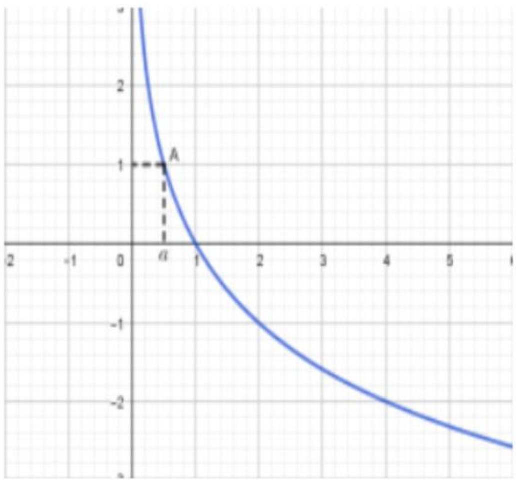
1)La fonction $\log_a$ est définie sur]0, +∞[.

2) La fonction $\log_a$ est continue et dérivable sur]0, +∞[et ($\forall x \in$]0, +∞[) ($(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln a}$)

donc le signe de $\log_a'$ dépend du signe de lna, ce qui nous amène à discuter deux cas :
$lna>0$; $lna<0$

Si $a\in]0,1[$ alors $lna<0$
Et donc : $(\forall x\in]0,+\infty[)\left(Log_a'(x)=\frac{1}{x\,lna}<0\right)$.

x	0	a	1	$+\infty$
$Log_a'(x)$		−		−
$Log_a(x)$	$+\infty$	1 ↘	0	↘ $-\infty$

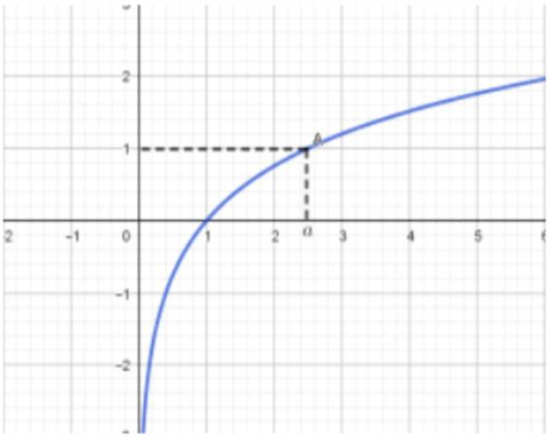


Prof/ATMANI NAJIB

Si $a \in]1,+\infty[$ alors $\ln a > 0$

Et donc : $(\forall x \in]0,+\infty[)\left(Log'_a(x) = \frac{1}{x \ln a} > 0\right)$.

x	0	1	a	$+\infty$
$Log'_a(x)$		$+$	$+$	
$Log_a(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$



Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_8 4$ 2) $\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2}$ 3) $\log_{\sqrt{3}} 9$

4) $A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right)$

Solution :1)

$$\log_{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = -\log_{\sqrt{2}} 2 = -\log_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -2\times 1 = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4 = 4\log_{\sqrt{3}} \sqrt{3} = 4\times 1 = 4$$

$$A = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) + \log_2(10) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[5]{3}\right) = -\log_2 5 + \log_2(5\times 2) + \log_{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{5}}\right)$$

$$A = -\log_2 5 + \log_2 5 + \log_2 2 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3 = 1 + \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} 3$$

$$A = 1 - \frac{1}{5}\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Exercice7 : On pose $\alpha = \log_{40}(100)$ et $\beta = \log_{16}(25)$

Calculer β en fonction α

Solution :on a : $\alpha = \frac{\ln 100}{\ln 40} = \frac{\ln\left(2^2\times 5^2\right)}{\ln\left(2^3\times 5\right)} = \frac{2\ln 2 + 2\ln 5}{3\ln 2 + \ln 5}$

D'autre part : $\beta = \frac{\ln 25}{\ln 16} = \frac{\ln\left(5^2\right)}{\ln\left(2^4\right)} = \frac{2\ln 5}{4\ln 2} = \frac{\ln 5}{2\ln 2}$

Aussi on a : $\alpha = \frac{2 + 2\frac{\ln 5}{\ln 2}}{3 + \frac{\ln 5}{\ln 2}} = \frac{2+4\beta}{3+2\beta}$

$$\alpha = \frac{2+4\beta}{3+2\beta} \Leftrightarrow \alpha(3+2\beta) = 2+4\beta \Leftrightarrow 3\alpha + 2\alpha\beta = 2+4\beta$$

$$3\alpha + 2\alpha\beta = 2+4\beta \Leftrightarrow 2(\alpha-2)\beta = 2-3\alpha \Leftrightarrow \beta = \frac{2-3\alpha}{2(\alpha-2)}$$

3) Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

Définition : La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par $\log$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)$ $\left(\log = \frac{\ln x}{\ln 10}\right)$

Propriétés :1) $\log(10) = 1$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

3) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(10^r) = r$

4) $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

5) $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Exemples : simplifier et calculer :

1) $\log_{10} 100$ 2) $\log_{10} 0,0001$

3) $A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$

Solution :1) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2\times 1 = 2$

2) $\log_{10} 0,0001 = \log_{10} 10^{-4} = -4\log_{10} 10 = -4$

3) $A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$

$$A = \log(250000) + \log\sqrt{250} - \log(125)$$

$$A = \log\left(5^2\times 10^4\right) + \frac{1}{2}\log\left(5^2\times 10\right) - \log\left(5^3\right)$$

$$A = \log 5^2 + \log 10^4 + \frac{1}{2}\left(\log 5^2 + \log 10\right) - 3\log 5$$

$$A = 2\log 5 + 4\log 10 + \frac{1}{2}(2\log 5 + 1) - 3\log 5$$

$$A = 2\log 5 + 4 + \log 5 + \frac{1}{2} - 3\log 5 = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Exercice 8 : déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20}$

Solution : $\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq 10^{20} \Leftrightarrow \log\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \geq \log\left(10^{20}\right)$

$\Leftrightarrow n\log\left(\frac{3}{2}\right) \geq 20 \Leftrightarrow n \geq \frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}$

Le plus petit entier naturel n_0 est donc :

$$n_0 = E\left(\frac{20}{\log\left(\frac{3}{2}\right)}\right) + 1 = 114$$

Exercice 9 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

1) $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$

2) $2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$

Où $\log$ est le logarithme décimal

Solution :1) a) cette équation est définie ssi :

$x>0$ et $2x>0$ donc : $D_E =]0;+\infty[$

b) Résoudre l'équation : $\log_3(2x)\times(\log_5(x)-1)=0$

ssi $\log_5(x)-1=0$ et $\log_3(2x)=0$

ssi $\log_5(x)=\log_5(5)$ et $\log_3(2x)=\log_3(1)$

ssi $x=5$ et $x=\frac{1}{2}$ donc : $S=\left\{\frac{1}{2};5\right\}$

2) $2(\log x)^2 - 19\log x - 10 = 0$

$D_E =]0;+\infty[$ on pose : $\log x = X$ donc :

$2X^2 - 19X - 10 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (19)^2 - 4\times2\times(-10) = 361+80 = 441 = (21)^2 > 0$

$X_1 = \frac{19+21}{2\times2} = 10$ et $X_2 = \frac{19-21}{2\times2} = -\frac{1}{2}$

Donc : $\log x_1 = 10$ et $\log x_2 = -\frac{1}{2}$

Donc : $x_1 = 10^{10}$ et $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

Donc : $S = \left\{\frac{\sqrt{10}}{10}, 10^{10}\right\}$

Exercice 10 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 1$ 2) $\log_{2x}(4x)+\log_{4x}(16x)=4$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$x-\frac{1}{2}>0$ donc : $x>\frac{1}{2}$ donc : $D_I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

a) $\log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$

car : $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante

donc : $x \leq 1$ donc : $S =]-\infty;1] \cap \left]\frac{1}{2};+\infty\right[= \left]\frac{1}{2};1\right]$

2)a) cette équation est définie ssi :

$4x>0$ et $16x>0$ et $2x>0$ et $2x\neq1$ et $4x\neq1$

donc : $x>0$ et $x\neq\frac{1}{2}$ et $x\neq\frac{1}{4}$

donc : $D_I =]0;+\infty[- \left\{\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right\}$

b) $\forall x \in D_I$: $\log_{2x}(4x)+\log_{4x}(16x)=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2)+\log_{2x}(2x)+\log_{4x}(4x)+\log_{4x}(4)=4$

Or on a $\log_a(a)=1$ donc :

$\Leftrightarrow \log_{2x}(2)+\log_{4x}(4)=2$

Et on a : $\log_{2x}(2)=\frac{\ln(2)}{\ln(2x)}=\frac{1}{\log_2(2x)}$

$\log_2(2x)=\log_2(2)+\log_2 x = 1+\log_2 x$

Donc : $\log_{2x}(2)=\frac{1}{1+\log_2 x}$

D'autre part on a : $\log_{4x}(4)=\frac{\ln(4)}{\ln(4x)}=\frac{1}{\log_4(4x)}$ et

$\log_4(4x)=\log_4(4)+\log_4 x=1+\log_4 x$

Et puisque : $\log_4 x=\frac{\ln(x)}{\ln(4)}=\frac{\ln(x)}{2\ln(2)}=\frac{1}{2}\log_2 x$

Donc : $\log_{4x}(4)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\log_2(x)}=\frac{2}{2+\log_2(x)}$

Donc l'équation devient : $\frac{1}{1+\log_2 x}+\frac{2}{2+\log_2 x}=2$

Cad : $2(\log_2 x)^2+3\log_2 x=0$

Cad : $\log_2 x=\frac{-3}{2}$ ou $\log_2 x=0$

Cad : $x=2^{\frac{-3}{2}}=\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}=\frac{2}{\sqrt{2^3}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ou $x=1$

donc : $S=\left\{\frac{1}{2\sqrt{2}};1\right\}$

4) Applications

Exemple1:A) soit la fonction g définie

par : $g(x)=x-lnx$

1) Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g et déterminer les limites aux bornes de D_g

2) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g puis dresser le tableau de variation de g

3) en déduire que : $\forall x>0 \qquad x>lnx$

B) soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx};si..x\succ 0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1)Montrer que $D_f=[0;+\infty[$

2)Montrer que f est continue à droite de 0

3)calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

5) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\quad f'(x)=\frac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6) Dresser le tableau de variation de f

7)déterminer les points d'intersections de C_f et la Droite : $(\Delta): y=1$

8) Montrer que : C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\frac{1}{2};1\right[$

9) Construire la courbe C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($ln2\approx 0,7$, $e\approx 2,7$)

Solution :1) $D_g=]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-lnx=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{lnx}{x}\right)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+} x-lnx=+\infty$ Car : $\lim\limits_{x\to0^+} lnx=-\infty$

2) $g'(x)=(x-lnx)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

Le signe de: $g'(x)$ est celui de $x-1$ car $x\in]0;+\infty[$

Tableau de variation de g

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

3)on remarque que : que la fonction g

Admet une valeur minimal en $x_0=1$

Donc : $g(1)\le g(x) \quad \forall x\in]0;+\infty[\qquad g(1)=1$

Donc : $0<1\le x-lnx$ Donc : $lnx<x \quad \forall x\in]0;+\infty[$

B) 1) $\begin{cases} f(x)=\frac{x+lnx}{x-lnx} \\ f(0)=-1 \end{cases}$

f est définie ssi $x-lnx\neq 0$ et $x>0$

On a $0<x-lnx$ donc : $x-lnx\neq 0$ et on a $f(0)=-1$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{lnx\left(\dfrac{x}{lnx}+1\right)}{lnx\left(\dfrac{x}{lnx}-1\right)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x}{lnx}+1}{\dfrac{x}{lnx}-1}$

Et on a $\lim\limits_{x\to0^+} lnx=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{lnx}=0^-$ et $\dfrac{0}{\infty}=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-1=f(0)$

Donc : f est continue à droite de 0

3)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\dfrac{lnx}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{lnx}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{lnx}{x}}{1-\dfrac{lnx}{x}}=1$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{lnx}{x}=0$

<u>Interprétation graphique :</u> la droite $y=1$ est une asymptote a la courbe de f

4) Etude de la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 :

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x+lnx}{x-lnx}+1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\dfrac{x+lnx+x-lnx}{x-lnx}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{x(x-lnx)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2}{x-lnx}=0=f'_d(0)$

Donc : f est dérivable à droite de 0

5)

$f'(x)=\left(\dfrac{x+lnx}{x-lnx}\right)'=\dfrac{(x+lnx)'(x-lnx)-(x+lnx)(x-lnx)'}{(x-lnx)^2}$

$=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x-lnx)-(x+lnx)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}{(x-lnx)^2}=\dfrac{x-lnx+1-\dfrac{lnx}{x}-x-lnx+1+\dfrac{lnx}{x}}{(x-lnx)^2}$

$\forall x\in]0;+\infty[\;:\; f'(x)=\dfrac{2-2lnx}{(x-lnx)^2}=\dfrac{2(1-lnx)}{(x-lnx)^2}$

6) tableau de variation de f : $x\in]0;+\infty[$

Le signe de: $f'(x)$ est celui de $1-lnx$

$1-lnx>0\Leftrightarrow1>lnx\Leftrightarrow\ln e>lnx\Leftrightarrow e>x$

<u>Tableau de variation de f</u>

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\dfrac{e+1}{e-1}$	$\searrow$	1

7) points d'intersections de C_f et $(\Delta): y=1$?

$f(x)=1\Leftrightarrow\dfrac{x+lnx}{x-lnx}=1\Leftrightarrow x+lnx=x-lnx$

$f(x)=1\Leftrightarrow 2lnx=0\Leftrightarrow x=1$

le point d'intersection de C_f et la Droite : $(\Delta): y=1$ est : $A(1;1)$

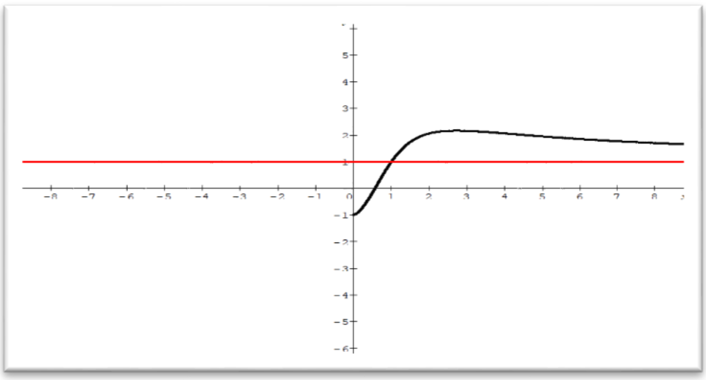
8) f est continue sur $D_f=[0;+\infty[$ donc continue

Sur : $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ et on a : $f(1)=\dfrac{\dfrac{1}{2}+ln(1)}{\dfrac{1}{2}-ln(1)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2}}=1>0$

Et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{2}+ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\dfrac{1}{2}-ln\left(\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}-ln2}{\dfrac{1}{2}+ln2}=\dfrac{\dfrac{1-2ln2}{2}}{\dfrac{1+2ln2}{2}}=\dfrac{1-2ln2}{1+2ln2}<0$

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires : l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$ cad C_f coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse dans $\left]\dfrac{1}{2};1\right[$

9)



Exemple2 : Considérons les fonctions f et g définies sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2} \text{ et } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$$

1)a)calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$; $\lim_{x\to -1^+} g(x)$

b) montrer que : $\forall x\in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x)=(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

et en déduire : $\lim_{x\to +\infty} g(x)$

c) Etudier les variations les fonctions f et g
Puis dresser les tableaux de variations de f et g

2) en déduire que $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}\prec \ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

3) calculer : $\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

4)monter que : $\forall x\in]0;+\infty[$:

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\prec \ln(1+x)\prec x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

Solution :1) $\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)$?

On pose : $t=1+x$ $\quad x\to -1^+ \Leftrightarrow t\to 0^+$

$$\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)=\lim_{t\to 0^+}\ln t=-\infty$$

Et on a : $\lim_{x\to -1^+} -x+\frac{x^2}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Donc : $\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}=-\infty$

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$? on a : $\lim_{x\to +\infty} -x+\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$

Et on a : $\lim_{x\to +\infty}\ln(1+x)=+\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to -1^+} g(x)=?$ on a : $\lim_{x\to -1^+}\ln(1+x)=-\infty$

Et $\lim_{x\to -1^+} -x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}=\frac{11}{6}$ donc : $\lim_{x\to -1^+} g(x)=-\infty$

b) montrons que : $\forall x\in]-1;+\infty[$ on a :

$$g(x)=(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right) ?$$

$$g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)=\ln(1+x)-\left(\frac{2x^3-3x^2+6x}{6}\right)$$

$$g(x)=(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

Déduction de : $\lim_{x\to +\infty} g(x)$?

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\lim_{x\to +\infty}(1+x)\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}\right)$$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}$?On pose: $t=1+x$

$x\to +\infty \Leftrightarrow t\to +\infty$ donc :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\lim_{t\to +\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3-3x^2+6x}{6(1+x)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^3}{6x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{3}=+\infty$$

Donc : $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ car $\lim_{x\to +\infty} 1+x=+\infty$

C1) Etude des variations les fonctions f?

$\forall x\in]-1;+\infty[$ $\quad x\to \ln(1+x)$ est dérivable donc f est dérivable et on a :

$$f'(x)=\frac{(1+x)'}{1+x}-1+x=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}\geq 0 \quad \forall x\in]-1;+\infty[$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

Donc : *tableau de variations de* f :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

C2) Etude des variations les fonctions g ?

g est dérivable sur $\forall x \in]-1;+\infty[$ et on a :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \left(1 - x + x^2\right) = \frac{-x^3}{1+x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$

Donc : *tableau de variations de g* :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

2) déduction d'un encadrement de $\ln(1+x)$?

Des variations les fonctions f et g en deduit que :

$g(x) \prec 0 \prec f(x) \quad \forall x \in]0;+\infty[$ donc :

$$\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \prec 0 \prec \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$$

Donc : $x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

3) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$?

Donc : $x - \frac{x^2}{2} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ on deduit que

$\frac{1}{2} - \frac{x}{3} \prec \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \prec \frac{1}{2}$ et puisque : $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$

Donc : $\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

4)montrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$:

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \text{ ?}$$

Soit ψ la fonction définie $\forall x \in]-1;+\infty[$

Par : $\psi(x) = g(x) + \frac{x^4}{4}$

ψ est dérivable sur $\forall x \in]-1;+\infty[$ et on a :

$$\psi'(x) = g'(x) + x^3 = \frac{x^4}{1+x} \geq 0 \quad \forall x \in]-1;+\infty[$$

$\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc ψ strictement croissante

sur $]-1;+\infty[$

$$x \geq 0 \Rightarrow \psi(x) \geq \psi(0) = 0$$

donc : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \quad \forall x \in]0;+\infty[$

donc : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \prec \ln(1+x) \prec x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

Exemple3 : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations et équations suivantes :

1) $\log_3(7x-1)^2 = 0$ 2) $\log_3(5x+1) = 2$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2} \leq 1$

Solution : 1)a) cette équation est définie ssi :

$7x - 1 \neq 0$ donc : $x \neq \frac{1}{7}$ donc : $D_I = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{7}\right\}$

¨b) $\log_3(7x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (7x-1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow 7x - 1 = 1$ ou $7x - 1 = -1$ $\Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$ ou $x = 0$

donc : $S = \left\{0; \frac{2}{7}\right\}$

2) $\log_3(5x+1) = 2$

2)a) cette équation est définie ssi : $5x + 1 > 0$

Donc : $D_E = \left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$

$\log_3(5x+1)=2 \Leftrightarrow 5x+1=3^2 \Leftrightarrow 5x=8 \Leftrightarrow x=\frac{8}{5}$

Puisque : $\frac{8}{5}\in\left]-\frac{1}{5};+\infty\right[$ alors :: $S=\left\{\frac{8}{5}\right\}$

3) $\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\le 1$

a) cette équation est définie ssi : $5x+1>0$ et

$\log_3(7x-1)^2\neq 0$ et $7x-1\neq 0$

cad : $x\succ-\frac{1}{5}$ et $x\neq\frac{1}{7}$ et $x\neq\frac{2}{7}$ et $x\neq 0$

$D_E=\left]-\frac{1}{5};+\infty\right[-\left\{0;\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right\}$

D'abord étudions le signe de : $\log_3(7x-1)^2$

$\log_3(7x-1)^2\ge 0\Leftrightarrow(7x-1)^2\ge 1$ car : $\log_{\frac{1}{2}}$ est strictement décroissante

$\Leftrightarrow(7x-1)^2-1\ge 0\Leftrightarrow x(7x-2)\ge 0$

1cas : si : $x\in\left]-\frac{1}{5};0\right[\cup\left]\frac{2}{7};+\infty\right[$ on a donc :

$\log_3(7x-1)^2\ge 0$

$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\le 1\Leftrightarrow\log_3(5x+1)\le\log_3(7x-1)^2$

$\Leftrightarrow 5x+1\le(7x-1)^2\Leftrightarrow 0\le 49x^2-19x$

$\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{1}{5};0\right[\cup\left]\frac{19}{49};+\infty\right[$

2cas : si : $x\in\left]0;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[$ on a donc :

$\log_3(7x-1)^2\prec 0$

$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\le 1\Leftrightarrow\log_3(7x-1)^2\le\log_3(5x+1)$

$\Leftrightarrow(7x-1)^2\le 5x+1\Leftrightarrow 49x^2-19x\le 0$

$\Leftrightarrow x\in\left(\left]0;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[\right)\cap\left[0;\frac{19}{49}\right]\Leftrightarrow x\in\left]0;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[$

Donc : $S=\left]-\frac{1}{5};0\right[\cup\left]0;\frac{1}{7}\right[\cup\left]\frac{1}{7};\frac{2}{7}\right[\cup\left[\frac{19}{49};+\infty\right[$

Exemple4: Considérons la fonction f définie par : $f(x)=x-3+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2)montrer que le domaine d'étude de f est :

$D_E=]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) Déterminer les limites aux bornes de D_E

4) Etudier les variations de f sur D_E

5) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

6). Construire la courbe (C_f) dans D_E

Solution : 1) $f(x)=x-3+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

cette fonction est définie ssi : $x\neq 0$ et $x\neq 1$ et $\frac{x+1}{x-1}\neq 0$

donc : $x\neq -1$ et $x\neq 1$ et $x\neq 0$

donc : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$

2)le domaine d'étude de f ?

a) $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$ on a $-x\in\mathbb{R}-\{-1;0;1\}$

b) $f(-x)=-x-3-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{-x+1}{-x-1}\right|$

$f(-x)=-x-3-\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

$f(-x)=-x-3-\frac{3}{2x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

Donc : $f(-x)+f(x)=-6$

Donc : $f(2\times 0-x)+f(x)=2\times(-3)-f(x)$

Donc le point : $I(0;-3)$ est un centre de symétrie

de (C_f) la courbe de f

donc Il suffit d'étudier f sur : $D_E=]0;1[\cup]1;+\infty[$

3) les limites aux bornes de D_E ?

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to 1}\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=+\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$

donc : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=0$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

4) Etude des variations de f sur D_E ?

La fonction f est dérivable sur les intervalles

$]1;+\infty[$ et $]0;1[$ (somme et composées de fonctions dérivables)

et on a : $f'(x)=1-\frac{3}{2x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{(2x^2-1)(x^2-3)}{2x^2(x^2-1)}$

$\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : *tableau de variations de* f :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{2}/2)$	$\nearrow$	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

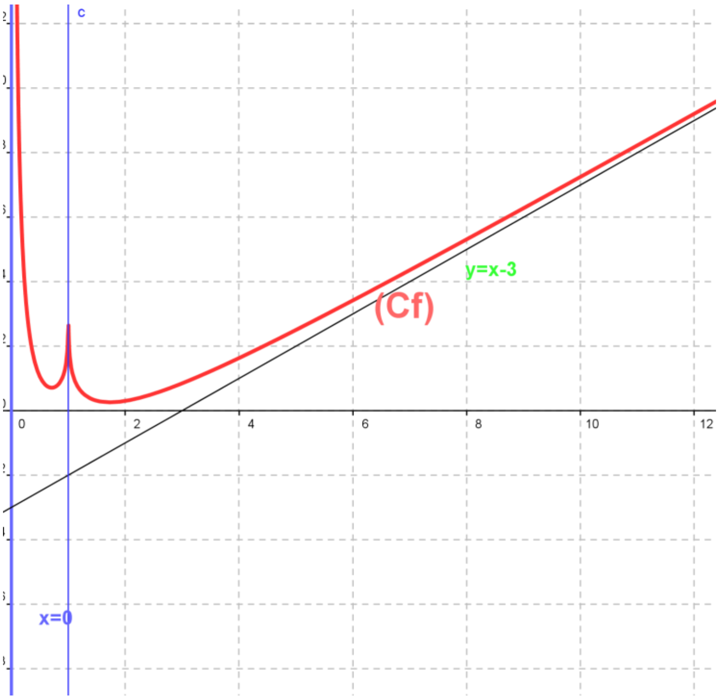
5) Etude des branches infinies de (C_f)

la courbe de f ?

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ donc : $x=0$ est une asymptote de la courbe de f
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$ donc : $x=1$ est une asymptote de la courbe de f
- $x=-1$ est une asymptote de la courbe de f (par symétrie)
- On a : $f(x)-(x-3)=\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-3)=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\frac{3}{2x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=0$

Donc : $y=x-3$ est une asymptote oblique de la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$



« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien