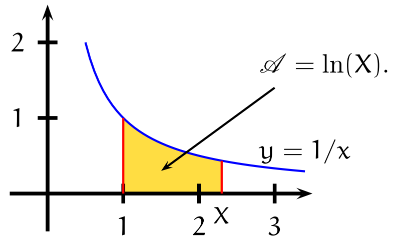
La fonction logarithme népérien

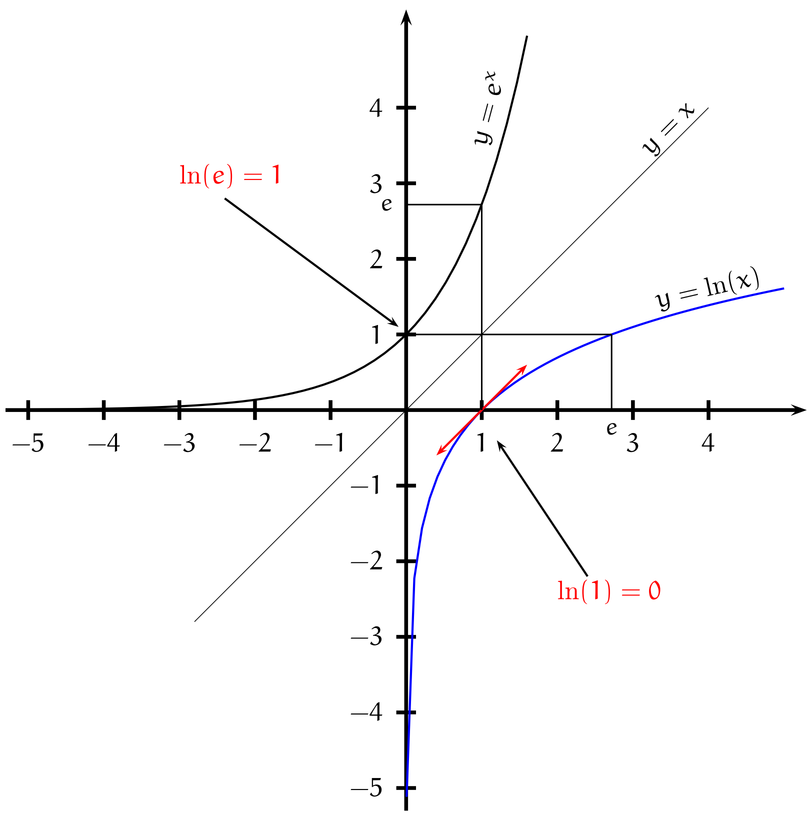
Définition de la fonction logarithme népérien



La fonction logarithme est l'unique fonction f, définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f(1) = 0$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$\ln$ est la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt.}$$



Propriétés analytiques

- La fonction logarithme népérien est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ (\ln)'(x) = \frac{1}{x}.}$$

- La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Limites aux bornes du domaine :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.}$$

- Théorèmes de croissances comparées :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0.}$$

pour tout entier naturel non nul n,

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln(x) = 0.}$$

- Nombre dérivé en 1 :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.}$$

Propriétés algébriques

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.	Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) + \ln(y) = \ln(x \times y)$.
Pour tout réel $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.	Pour tout réel $x > 0$, $-\ln(x) = \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.	Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $\ln(x^n) = n \ln(x)$.	Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif n, $n \ln(x) = \ln(x^n)$.

Liens avec la fonction exponentielle

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \ln(e^x) = x. \quad \text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } e^{\ln(x)} = x.}$$

Résolution d'équations et d'inéquations

Pour tout réel a, l'équation $\ln(x) = a$ a une solution et une seule.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0,\ (\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y). \quad \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ et tout réel } a,\ \ln(x) = a \Leftrightarrow x = e^a.}$$

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

$$\boxed{\text{Pour tous réels } x > 0 \text{ et } y > 0,\ (\ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y). \quad \text{Pour tout réel } x > 0 \text{ et tout réel } a,\ \ln(x) < a \Leftrightarrow x < e^a.}$$