

## Feuilles d'exercices : Convergence de suites

### Exercice 1 (\*\*)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers  $+\infty$  est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si  $(u_n)$  est croissante, et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$ , alors  $(v_n)$  est croissante.
5. Si  $(|u_n|)$  converge, alors  $(u_n)$  aussi.
6. Si  $(|u_n|)$  converge vers 0, alors  $(u_n)$  aussi.

### Exercice 2 (\* à \*\*)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- |   |  |   |
|---|--|---|
| • $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$                     | • $u_n = (-n + 2)e^{-n}$                     | • $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$                                  |
| • $u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$ | • $u_n = \ln n + e^{-3n}$                    | • $u_n = \frac{2\sqrt{n} + 3 \ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$ |
| • $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$                  | • $u_n = \frac{(n+2)!}{(n^2 + 1) \times n!}$ | • $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$ |

### Exercice 3 (\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
3. Montrer par récurrence que,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 \geq 2n + u_0^2$ . En déduire la limite de la suite.

### Exercice 4 (\*\*\*)

On définit une suite  $(u_n)$  par  $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} k!$  (je rappelle que par convention  $0! = 1$ ). Montrer à l'aide d'un encadrement que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n!} = 1$ .

### Exercice 5 (\*\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ , avec  $a \in \mathbb{R}_+$ .

1. Montrer que la suite est croissante.
2. Montrer que,  $\forall x \geq 0, \frac{t}{1+t} \leq \ln(1+t) \leq t$ .

3. En déduire que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{na}{n+a} \leq \ln u_n \leq a$ .
4. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant  $a = 1$  ?

## Exercice 6 (\*)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 < u_n \leq 1$ , puis prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

## Exercice 7 (\*\*)

On considère deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies de la façon suivante :  $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}$ , et  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ . Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ ).

## Exercice 8 (\*\*)

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{n^2+k}$ .

1. Montrer que  $\frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2+1}$ .
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

## Exercice 9 (\*\*\*)

Soient  $a$  et  $b$  deux réels vérifiant  $0 < a < b$ . On définit deux suites de la façon suivante :  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ .

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers la même limite.
5. Écrire un programme Pascal permettant de calculer une valeur approchée de cette limite à  $\varepsilon$  près ( $\varepsilon$  étant choisi par l'utilisation). On utilisera une boucle WHILE ou REPEAT.

## Exercice 10 (\*\*\*)

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = a \neq 1$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$ .

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ .
3. Étudier également le signe de  $f(x) - x$ .
4. On suppose  $a > 1$ . À l'aide des questions précédentes, montrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $u_n \geq 2(1 + \sqrt{2})$ , puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand  $a < 1$ .