Exercices d'application et de réflexions

TD : Exercices
Sur LES SUITES NUMERIQUES

Exercice1:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1- Calculer les 3 premiers termes.

2- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad : 0 \le u_n$

3- Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n \le 2$

Exercice2:soit $(v_n)_{n\ge1}$ la suite définie par :

$v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est minorée par 0

2)Montrer que $(v_n)_{n\ge1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$

3)Que peut-on déduire ?

Exercice3 : Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{2+\cos n}{3-\sin\sqrt{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice4: Soit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = (-1)^n \sin\sqrt{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

Exercice5:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Montrer par récurrence que $u_n \le u_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice6:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice7:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice8:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \quad \forall n\in\mathbb{N} \\ u_0 = 3 \end{cases}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 2

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4

3)Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice9: Un jeune homme se préparait à l'examen du baccalauréat ; son père, pour l'encourager, lui demanda ce qu'il désirait en récompense

Mon examen devant avoir lieu le 20 juin, répond-t-il, donne-moi seulement 1 centime le 1er juin, 2 centimes le lendemain, 4 centimes le surlendemain, en doublant chaque jour jusqu'au 20 inclusivement. Et donne mois la somme. J'emploierai cet argent pour faire un voyage pendant les vacances.

Le père pensa qu'avec cette somme son fils n'irait pas loin ; mais au bout de quelques jours, il commença à s'apercevoir de son erreur.

Avec quelle somme le fils va-t-il pouvoir partir en vacances ?

Exercice10 : calculer en fonction de n la somme suivante :

$$s_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice11:soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+2}=\frac{1}{27}(12u_{n+1}-u_n) \\ u_0=2;u_1=\frac{4}{9} \end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

et on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=u_n-\frac{1}{3^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que $u_{n+1}=\frac{1}{9}u_n+\frac{2}{3^{n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) a)Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont en déterminera la raison et le premier terme

b) écrire v_n et u_n en fonction de n

c) calculer la somme : $s_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$

Exercice12 :soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \\ u_0\in\left]-1;0\right[\end{cases} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

1) Montrer que $-1\prec u_n\prec 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante

3) Montrer que $u_{n+1}\geq\frac{u_n}{\sqrt{u_n+2}} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Et en déduire que : $u_n\geq\frac{u_0}{\left(\sqrt{u_0+2}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Exercice13:soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n=n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

Exercice14:soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=3-2n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty$

Exercice15: soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n=\frac{1}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

Exercice16:soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$v_n=\frac{3n-1}{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ démontrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=3$

Exercice17:soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_n=(-1)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ Démontrer en utilisant la définition que : cette suite est divergente

Exercice18: Utiliser les Opération sur les limites des suites pour calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{3n}}-\frac{2}{3n}+\frac{5}{n^2}-1$ ***2)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2-n$ ***4)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}-2n$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}4n^2-2n-5$ ***6)*** $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-7}{3n^2+5}$

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-3n+2-n}$

Exercice19 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}4n^3-5n^2+3n-1$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}6n^3-2n^5+7n-9$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{9n-3}{3n+5}$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{6n^2-9}{3n+1}$ 5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7n^2+1}{14n^3-5n+9}$

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n-4}$

Exercice20: calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-n$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^5+2n^3-n+4}$ 4) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\arctan\frac{1}{n}$

Exercice21: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n=2(-1)^n+\frac{4}{3}n^2+2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

1)montrer que : $v_n\geq\frac{4}{3}n^2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2)en déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

Exercice22: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n=3n+5\sin n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

Exercice23: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_n=-4n+3\cos n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$

Exercice24: soit (u_n) la suite définie par :

$$u_n = 3 + \frac{\sin n}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice25:calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$

Exercice26: soit $(v_n)_{n\geq 4}$ la suite récurrente

définie par : $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{5v_n}{n+1} \\ v_4 = 10 \end{cases}$

montrer que La suite ($(v_n)_{n\geq 4}$ est convergente.

Exercice27 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n - 2\sin\frac{1}{n}}{4n + \sin\frac{1}{n}}$

Exercice28: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$v_{n+1} = v_n + n^4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = 1$

montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Exercice29 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$

et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite (u_n)est croissante
2. Montrer que la suite (u_n)est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice30: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suites tel que :

$$v_n = \sqrt{\frac{2n^2 - n + 1}{3n^2 + 4}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exercice31: calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi n + 1}{3n + 4}\right)$ 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}}$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \arctan\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice32: calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-5)^n$

Exercice33 : calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} (0,7)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2)^n$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (4)^{-n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(5)^n}{(4)^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (3)^n - \frac{1}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(3)^n + (2)^n}{(2)^n}$

Exercice34: Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de C_f avec la droite (Δ) $y = x$
2. Soit la suite (u_n) définie par: $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite (u_n)

b) Conjecturer la monotonie de la suite (u_n) et sa limite potentielle.

3. Montrer que la suite (u_n)est croissante Majorée par 2.
4. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_n = u_n + \alpha$

a) Déterminer α pour que la suite (v_n) soit géométrique.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n

c) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice35 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$

et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Etudier les variations de f sur $I = [0,1]$ et Montrer que $f(I) \subset I$

2) a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,1]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercices 36 : Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de f et déterminer f ([0,2])
2. a) Montrer que :($\forall n \in \mathbb{N}$) $u_n \in I = [0,2]$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

c) Calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice37: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\ v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Les suites (u_n) et (v_n) sont appelées : Suites adjacentes.

Exercice38 : Considérons les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$ et $v_0 = b$ avec $0 < a < b < 2a$

$u_n v_n = ab$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante
3. a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_{n+1} - u_{n+1} \prec \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

b) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n$

c) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes

4. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n)

Exercice39: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par: $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ 1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice40: Soit les suites numériques (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et

$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

2) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice41: Soit les suites numériques : (x_n) et (u_n) et (v_n) définies par : $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et

$u_n = x_{2n}$ et $v_n = x_{2n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite.

Exercice42 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{1}{x+1}$

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

2) on pose : $\alpha_n = u_{2n+1}$ et $\beta_n = u_{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (α_n) est croissante et que la suite (β_n) est décroissante

b) Montrer que : $\alpha_n \leq \beta_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$

4) Montrer que $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

5) en déduire que la suite (u_n) est convergente

Et déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice43 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{12u_n}{9+u_n^4}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $1 \leq u_n \leq \sqrt{\sqrt{3}}$

b) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Et en déduire sa convergence et sa limite

2) on pose : $v_n = \frac{u_n}{n!} + \sqrt{\sqrt{3}}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{2}{9+u_n^4} \leq \frac{1}{5}$ et en déduire la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

b) Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien