Exercices sur les suites implicites

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x^3+2x-1$

1) a) montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J que l'on déterminera

b) déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et $\alpha<1$

2) Soit n un entier naturel non nul.

a) montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{n}$ admet une et une seule solution V_n

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \alpha\leq V_n\leq 1$

c) étudier la monotonie de $(V_n)_n$

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x)=x^3+x^2+nx-2$

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution x_n et que $0<x_n<1$

2) Vérifier que $f_{n+1}(x_n)=x_n$ puis déduire que $(x_n)_n$ est décroissante

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $F_n(x)=2x^3-x^2+2(n+1)x-1$

1) Montrer que $(\exists!\, a_n\in\,]0,1[)\quad F_n(a_n)=0$

2) Etudier le signe de $F_{n+1}(x)-F_n(x)$

3) étudier la monotonie de $(a_n)_n$

4) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_n\leq\frac{1}{n+1}$

Exercice 4

Soient n un entier de $\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x)=\arctan\left(\frac{x}{n}\right)+2x-1$$

1) étudier le sens de variation de la fonction f_n

2) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution b_n et $b_n<\frac{1}{2}$

3) Etudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ puis déduire la monotonie de $(b_n)_n$