Suites numériques

Exercice (1)

On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$

a) Montrer que $(\forall k \geq 2)$ $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$

b) déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est majorée

Exercice (2)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite telle que : $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $U_n \geq \frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_{n\geq 1}$

3) montrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ est convergente

Exercice (3)

On considère la suite $(x_n)_n$ définie par : $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \sqrt[3]{1+\frac{1}{2}x_n^3}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < x_n < 2$

2) montrer que $(x_n)_n$ est croissante puis qu'elle est convergente

3) on pose $U_n = x_n^3 - 2$ pour tout entier naturel n

montrer que $(U_n)_n$ est géométrique et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice (4)

Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. on considère la fonction F_n définie sur $]0,1]$

Par : $F_n(x) = (1-x)(x+1)^n$

1) étudier le sens de variation de F_n

2) montrer que l'équation $F_n(x) = 1$ admet un unique solution x_n

3) a) montrer que $(\forall x \in]0,1[)$ $F_{n+1}(x) < F_n(x)$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_{n+1} \in \left]\frac{n-1}{n+1}, 1\right[$

c) déduire la monotonie de $(x_n)_n$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Exercice (5)

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$f_n(x) = x^n + x^2 + x - 1$ et soit α la solution positif de $x^2 + x - 1 = 0$

1) sans déterminer α montrer que $0 < \alpha < 1$

2) montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}^+$ un unique solution notée U_n

3) montrer que $(\forall n \geq 3)$ $0 < U_n < \alpha$

4) montrer que $(U_n)_n$ est croissante et convergente

5) montrer que $(\forall n \geq 3)$ $U_n^n + (U_n - \alpha)\left(U_n + \frac{1}{\alpha}\right) = 0$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice(6)

soit a un réel et on considère la suite $(U_n)_n$ telle que :

$U_0 = a - \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = U_n^2 + (1-2a)U_n + a^2$

f : المعرفة بما يلي est la fonction définie par : $f(x) = x^2 + (1-2a)x + a^2$

1) a) vérifier que $f(x) - a = (x-a)(x-a+1)$

b) déduire que $f([a-1,1]) \subset [a-1,a]$

2) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$ $f(x) \geq x$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $a-1 < U_n < a$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$ en déduire qu'elle est convergente

c) déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$