

## **LES SUITES NUMERIQUES**

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique.

**A) Suite majorée minorée bornée croissante décroissante convergente**

- $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad u_n \leq M$$

- $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :  $m \leq u_n \quad \forall n \in I$

- Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

$(u_n)_{n \in I}$  est bornéessi s'il existe un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad |u_n| \leq M$$

- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissantessi:  $\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissantessi  $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite qui tend vers une limite finie  $l$  s'appelle une suite convergente sinon elle est dite divergente
- Toute suite convergente est bornée
- Si une suite admet une limite finie  $l$  cette limite est unique
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$

**B) Suite arithmétique :**  $(u_n)_{n \in I}$  arithmétique:ssi  $\forall n \in I$

$u_{n+1} = u_n + r$  Le réel  $r$  la raison de la suite

si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_p$  l'un de ses termes.

$$1) \quad u_n = u_p + (n-p)r \quad \forall n \in I$$

$$2) \quad s_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$$

**C) Suite géométrique :**  $(u_n)_{n \in I}$  géométriquessi

$u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$   $q$  s'appelle la raison de la suite.

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et si  $p$  est un entier naturel alors :

$$1) \quad u_n = q^{n-p}u_p \quad \forall n \in I$$

$$2) \quad s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

Si  $q = 1$  alors :  $s_n = (n-p+1)u_p$

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } s_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

**D) Suite et limites :** 1) On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ )ssi :

$$(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2) On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $-\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ )ssi  $(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -A)$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$

4)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

5) la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $l$ ssi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

6)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p \in \mathbb{N}^*$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

**E) Opération sur les limites des suites.**

**1) Limite de la somme :**

$\lim u_n$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Formes indéterminées

**2) Limites des produits**

$\lim u_n$	$l$	$l > 0 \text{ ou } +\infty$	$l < 0 \text{ ou } -\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Formes indéterminées

**3) Limites des inverses**

$\lim u_n$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
$\lim \left( \frac{1}{u_n} \right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

**4) Limites des quotients**

$\lim u_n$	$l$	$l > 0 \text{ ou } +\infty$	$l < 0 \text{ ou } -\infty$	$0$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim \left( \frac{u_n}{v_n} \right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
...				Formes indéterminées	Formes indéterminées

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

**Remarques :** 1) La limite d'une suite polynôme est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une suite rationnelle est la limite du rapport des termes de plus grand degré

**F) limites et l'ordre et techniques de calculs des limites :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites

1) si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers L et :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)$  :

$u_n \geq 0$  Alors :  $L \geq 0$

2) si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes tels que :

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  Alors :  $\lim v_n \leq \lim u_n$

3) si  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et  $\lim v_n = +\infty$  alors :

$\lim u_n = +\infty$

4) si :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et  $\lim u_n = -\infty$

alors :  $\lim v_n = -\infty$

5) si l un réel. tels que:  $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq p$

et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

6) si  $w_n \prec u_n \prec v_n$  et  $\forall n \geq p$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

Alors :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

**G) Suite de la forme :**  $v_n = f(u_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et  $(u_n)$  une suite numérique telle que

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et f continue en l

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$

**H) limite de Suite de la forme :  $a^n$  et  $n^p$**

1)a) si  $a > 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si  $-1 < a < 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si  $a \leq -1$  ( $a^n$ ) n'a pas de limites

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  si  $p \in \mathbb{N}^*$

**I) Suite de la forme :**  $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et  $(u_n)$  une suite numérique telle que :

a) f est continue sur I

b)  $f(I) \subset I$

c)  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d)  $u_0 \in I$  ( donc  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$  )

e)  $(u_n)$  est convergente

Alors la suite  $(u_n)$  tend vers l solution de l'équation

$$f(x) = x$$

### J) Les suites adjacentes :

1) deux suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

a) L'une est croissante l'autre est décroissante.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$$

2) Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes et  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante alors

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$$



*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*