# SUITES NUMERIQUES

## I) RAPPELLES

### 1) Suite arithmétique ; suite géométrique

#### 1.1 Activité :

**Activité :**

Une personne a reçu deux offres de deux sociétés commerciales pour une durée de 4 ans.

La société $\mathcal{A}$ propose un salaire de 4500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 75 Dh chaque mois.

La société $\mathcal{B}$ propose un salaire de 3500 Dh pour le premier mois et une augmentation de salaire de 3% chaque mois.

Soient $a_n$ et $b_n$ les salaires proposés respectivement par les sociétés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ pour le nième mois.

1- Calculer les salaires des 4 premiers mois pour les deux sociétés.

2- Trouver une relation entre $a_{n+1}$ et $a_n$ puis entre $b_{n+1}$ et $b_n$.

3- Calculer les salaires du 10 ème mois pour les deux sociétés.

4- Quelle est la société la plus bénéfique pour la personne ?

**Rappelle :**

| | Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|---|
| Définition | $u_{n+1} = u_n + r$ | $v_{n+1} = qv_n$ |
| Terme général | $u_n = u_p + (n-p)r$ | $v_n = v_p \times q^{n-p}$ |
| Relation entre 3 termes Consécutifs $a, b$ et c | $2b = a + c$ | $b^2 = ac$ |
| Somme des termes consécutifs | $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$ $= \frac{(n-p+1)}{2}[u_p + u_n]$ | $S = v_p + v_{p+1} + \cdots + v_n$ $= v_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$ $(q \neq 1)$ |
| Variations | $(u_n)$ est croissantes ssi $r \geq 0$<br>$(u_n)$ est décroissantes ssi $r \leq 0$ | $(v_n)$ est croissantes ssi $q \geq 1$<br>$(v_n)$ est décroissantes ssi $0 < q \leq 1$<br>Si $q < 0$ alors $(v_n)$ n'est pas monotone |

**Exercice** :

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par :

$\begin{cases} u_0 = 4 \\ (\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$ (La suite $(u_n)_n$ s'appelle une suite arithmético-géométrique)

1- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha\ )$

a- Déterminer $\alpha$ pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.

b- Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.

2- Calculer en fonction de $n$ la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

## 2) Suites majorée, suites minorée ; Monotonie d'une suite.

**Définition** (Rappelle) **:**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est majorée** s'il existe un réel $M$ tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \leq M)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est minorée** s'il existe un réel $m$ tel que :$(\forall n \in \mathbb{I})(u_n \geq m)$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est bornée** si elle est majorée et minorée.

**Théorème :**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ une suite numérique. ($\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$)

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est croissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \geq u_n)$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{I}}$ **est décroissante** si et seulement si: $(\forall n \in \mathbb{I})(u_{n+1} \leq u_n)$

**Exercice 1 :**

Soit la suite récurrente $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 1}{2u_n + 3} \end{cases}$

1- Montrer que $(u_n)_n$ est minorée par 1 et majorée par 3.

2- Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$.

**Exercice 2 :**

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

1- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est croissante.

2- Montrer que la suite $(v_n)_n$ est minorée par $\sqrt{2}$ et majorée par 2.

**Exercice 3 :**

Soit la suite récurrente $(w_n)_n$ définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ (\forall n \geq 1)\left(w_n = \sqrt[n]{w_{n-1}^{n-1} + 2}\right) \end{cases}$

1- Calculer $w_1$ ; $w_2$ et $w_3$

2- Soit la suite $(v_n)_n$ définie par ; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(v_n = w_n^n)$

a- Déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$

c- Déterminer $v_n$ puis $w_n$ en fonction de $n$.

# II) LIMITE D'UNE SUITE

## 1) Activité

Fractale.exe

**Activité :**

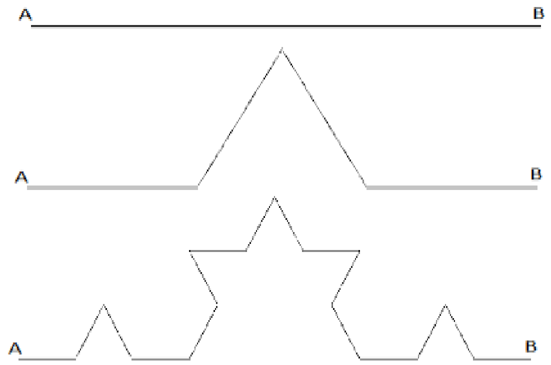
1- Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}^+)(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

2- Soit $[AB]$ un segment de longueur $l_0 = 1$ ; On procède comme suite : dans l'étape 1 on découpe le segment $[AB]$ en 3 parties égales et on ajoute une quatrième de même longueur.

Dans l'étape 2 on fait la même chose qu'on a fait au segment $[AB]$ au 4 segments obtenus à l'étape 1. ainsi de suite

a) Quelle est le nombre de segments dans l'étape $n$

b) Quelle est la longueur de la ligne brisée dans l'étape $n$




3- déterminer un entier $n$ pour la quelle $l_n > 1000$

4- Soit $A$ un réel quelconque positif ; Montrer qu'il existe $N_0$ tel que si $n \geq N_0$ alors $l_n \geq A$

On peut dire : « **On peut rendre $l_n$ aussi grande qu'on veut** »

Ceci se traduit mathématiquement par : $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n = +\infty$

***La ligne brisée "limite" s'appelle une fractal.***

## 2) Définitions

**Définition 1 :**

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ (quand $n$ tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\ N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n > A)$ on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

**Remarque :** L'expression « quand $n$ tend vers $+\infty$ » est superflu car l'étude de la limite d'une suite c'est toujours quand $n$ tend vers $+\infty$ et on se contente d'écrire : $\lim u_n = +\infty$

**Propriété :**(limites de référence)

Les suites $(n)_n$ ; $(n^2)_n$ ; $(n^k)_n$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ ; $(\sqrt{n})_n$ , $(\sqrt[p]{n})_n$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ tendent vers $+\infty$

**Exercice** : Montrer le dernier résultat

**Définition 2 :**

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $-\infty$ (quand $n$ tend vers $+\infty$)si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall A > 0)(\exists\ N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow u_n < -A)$ on écrit $\lim u_n = -\infty$

**Remarque :** $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$

**Définition 3 :**

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et $l$ un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_n$ tend vers $l$ si elle vérifie la proposition suivante : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists\ N_0 \in \mathbb{N})(n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| > A)$ on écrit $\lim u_n = l$

**Définition 4 :**

Une suite qui tend vers une limite finie $l$ s'appelle une suite **convergente.**
une suite qui n'est pas convergente est une suite **divergente.**

**Théorème :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est divergente

demonstration propriété.pdf

**Exemple :** (Exercice déjà corrigé)

Soit la suite récurrente $(v_n)_n$ définie par : $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n} \end{cases}$

La suite $(v_n)_n$ est croissante.
La suite $(v_n)_n$ est majorée par 2. donc elle est convergente.

**Remarque :**

Une suite peut être convergente sans qu'elle est monotone

$u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est pas monotone mais elle est convergente.

**Remarque :**

Suite divergente veut dire que la suite n'a pas de limite finie c'est-à-dire que la suite n'a pas de limite ou elle a une suite infinie.

**Exemples :**

- les suites $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ ; $\left(\frac{1}{n^2}\right)_n$ ; $\left(\frac{n+2}{n+1}\right)_n$ sont des suites convergentes
- Les suites $(n)_n$ ; $(-n^2)_n$ ; $\left(n^k\right)_n$ ; $((-1)^n)_n$ ; $(cosn)_n$ sont divergentes

**Théorème :**

Si une suite $(u_n)_n$ admet une limite finie $l$ cette limite est **unique**

**Preuve** : (En exercice)

Utiliser la définition et la propriété :$|a+b| \leq |a|+|b|$

## 3) Opération sur les limites des suites.

### 1) Limite de la somme

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim u_n$ | $l$ | $l$ | | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $\lim v_n$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $\lim(u_n+v_n)$ | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | Formes indéterminées |

### 2) Limites des produits

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim u_n$ | $l$ | $l>0$ ou $+\infty$ | | $l<0$ ou $-\infty$ | | $\pm\infty$ |
| $\lim v_n$ | $l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |
| $\lim(u_n \times v_n)$ | $l.l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Formes indéterminées |

### 3) Limites des inverses

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\lim u_n$ | $l \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$ | $\frac{1}{l}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$ |

### 3) Limites des quotients

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim u_n$ | $l$ | $l>0$ ou $+\infty$ | | $l<0$ ou $-\infty$ | | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim v_n$ | $l' \neq 0$ | $0^+$ | $0^-$ | $0^+$ | $0^-$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ | $\frac{l}{l'}$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | Formes indéterminées | Formes indéterminées |

**Propriété :**

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

## 4) Les techniques de calculs des limites

**Théorème 1:**

Si la suite $(u_n)_n$ est définie d'une façon explicite $u_n = f(n)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**Exercices :**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\left(\frac{2n^2+n}{\sqrt[3]{n^5+n^2}}\right)$

2. $\lim\left(n\ Arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
3. $\lim\left(\sqrt[4]{n^3+n^2}-\sqrt{n+1}\right)$

**Théorème 2 :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques tels que : $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\le u_n)\\ \lim v_n=+\infty\end{cases}$

On a alors : $\lim u_n=+\infty$.

**Preuve :** (On utilise la définition des limites)

**Propriété 1 :**( l'inégalité de Bernoulli)

$$(\forall n\in\mathbb{N})(\forall x\in\mathbb{R}^+)(1+x)^n\ge 1+nx$$

**Corolaire :**

- Si $q>1$ alors $\lim q^n=+\infty$
- Si $-1<q<1$ alors $\lim q^n=0$
- Si $q\le -1$ la suite $(q^n)_n$ est divergente.

**Preuve** :

1. Pour $q>1$ : On pose $q=1+x$ où $x>0$ et donc $q^n=(1+x)^n\ge 1+nx$ et comme $\lim 1+nx=+\infty$ alors d'après le théorème précèdent : $\lim q^n=+\infty$
2. Pour $-1<q<1$
   a) Pour $q=0$ on a : $\lim 0^n=0$
   b) On suppose que $q\ne 0$ on a : $\left|\frac{1}{q}\right|>1$ et par suite : $\lim\left|\frac{1}{q}\right|^n=\lim\frac{1}{|q|^n}=+\infty$ d'où et d'après les opérations sur les limites on a : $\lim|q|^n=0$ donc $\lim q^n=0$

**Exercices :**

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\left(-\frac{4}{7}\right)^n$
2. $\lim\left(\frac{2^n-3^n}{3^n-5^n}\right)$
3. $\lim\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

## *5) Les limites et l'ordre :*

**Théorème :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques. On a les assertions suivantes :

❶ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\le u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\ge 0$

❷ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(a\le u_n)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $l\ge a$

❸ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(0\le u_n\le b)\\ \lim u_n=l\end{cases}$ alors $a\le l\le b$

❹ Si $\begin{cases}(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(v_n\le u_n)\\ \lim u_n=l \text{ et } \lim v_n=l'\end{cases}$ alors $l'\le l$

## 6) Les critères de convergences.

### 6.1 Critères fondamentaux :

**Critère 1 :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et $l$ un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(|u_n - l| \leq v_n) \\ \lim v_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

**Critère 2 :**

Soient $(u_n)_n$ , $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites numériques et $l$ un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(w_n \leq u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = \lim w_n = l \end{cases}$ alors $\lim u_n = l$

**Critère 3 :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et $l$ un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \\ \lim v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim u_n = +\infty$

**Critère 4 :**

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques et $l$ un réel.

Si $\begin{cases} (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \leq v_n) \\ \lim v_n = -\infty \end{cases}$ alors $\lim u_n = -\infty$

**Preuve :**

En utilisant la définition des limites montrer l'un des 4 critères.

**Exercice :**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim \frac{3n+\sin(n)}{n+1}$
2. $\lim \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{n^2+k}\right)$
3. $\lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}} = \lim \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.

### 6.2 Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

**Critère 5 :**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$

Si $\begin{cases} \lim u_n = l \\ f \text{ continue en } l \end{cases}$ alors $\lim f(u_n) = f(l)$

**Exercice :**

Déterminer :

1. $\lim \arctan\left(n\, sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

2. $\lim \sqrt[3]{n\ arctan\left(\frac{8}{n}\right)}$

### 6.3 Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

**Activité :**

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

1. Déterminer le point d'intersection de $C_f$ avec la droite $(\Delta)\ y = x$
2. Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$
   a) Poser sur l'axe des abscisses les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n$
   b) Conjecturer la monotonie de la suite $(u_n)_n$ et sa limite potentielle.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante majorée par 2.
4. Soit la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n = u_n + \alpha)$
   a) Déterminer $\alpha$ pour que la suite $(v_n)_n$ soit géométrique.
   b) Déterminer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$
   c) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$

**Critère 6 :**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ ; et $(u_n)_n$ une suite numérique telle que :

Si :

d) $f$ est continue sur $I$
e) $f(I) \subset I$
f) $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$
g) $u_0 \in I$ ( donc $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$
h) $(u_n)_n$ est convergente

Alors la suite $(u_n)_n$ tend vers $l$ solution de l'équation $f(x) = x$

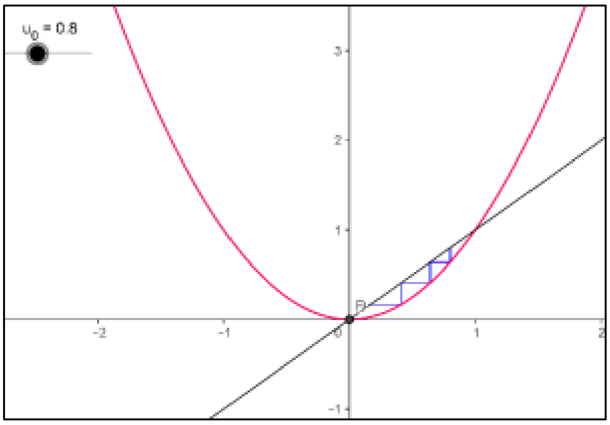
**Remarque :**

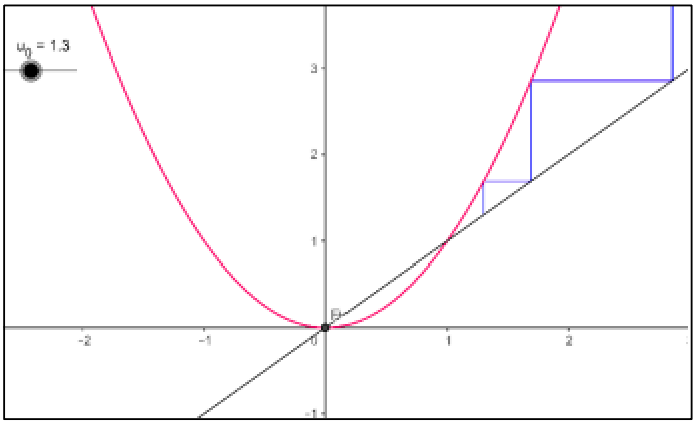
1- Par fois l'équation $f(x) = x$ admet plusieurs solution ; Dans ce cas prenez celle qui est dans $I$.

S'il y a plusieurs solutions de l'équation $f(x) = x$ ; utiliser la monotonie de $(u_n)$

2- La fonction $f$ et la suite $(u_n)_n$ n'ont pas nécessairement la même monotonie :

Pour la même fonction $f : x \mapsto x^2$ si on considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0.8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ elle sera décroissante convergente (Prouver le) ; mais si on considère la suite $(v_n)$ définie par $\begin{cases} v_0 = 1.3 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$ elle sera croissante divergente.






**Exercices d'applications**

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

1. Etudier les variations de $f$ et déterminer $f([0,2])$
2. a) Montrer que :$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I = [0,2])$
   b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
   c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.

**Critère 8 :**

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

**Preuve :**

On suppose que la suite $(u_n)_n$ est croissante non majorée et montrons : (P) $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow u_n > A)$

Soit $A > 0$ puisque $(u_n)_n$ est non majorée alors il existe $n_0$ tel que $u_{n_0} > A$

et puisque $(u_n)_n$ est croissante alors si $n > n_0$ alors $u_n > u_{n_0} > A$

donc il existe $N$ $(N = n_0)$ qui vérifie la propriété (P)

D'où la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$

**Exercice**

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ où $f(x) = x^2 + x + 1$

1. Monter que la suite $(u_n)_n$ est croissante
2. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est non majorée (Par absurde) .
3. En déduire la limite de la suite $(u_n)_n$.

**Propriété :**

| |
|---|
| Toute suite convergente est bornée |

**Remarque :** La réciproque n'est pas vraie : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais pas convergente.

## 6.4 Les suites adjacentes :

**Activité :**

Soit les suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(v_n > u_n)$
3. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et ont la même limite.

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont appelées : ***Suites adjacentes.***

**Définition :**

On dit que deux suites numériques $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont **adjacentes** si :

- L'une est croissante l'autre est décroissante.
- $\lim(u_n - v_n) = 0$

**Propriété :**

Si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites **adjacentes** et $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

**Preuve :**

Par hypothèse on a : $(u_n)_n$ est croissante donc $u_n \leq u_{n+1}$

$(v_n)_n$ est décroissante donc $v_{n+1} \leq v_n$

Par suite : $(u_{n+1} - v_{n+1}) - (u_n - v_n) \leq (u_n - v_n) - (u_n - v_n) = 0$

D'où la suite $(u_n - v_n)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc elle est de termes positifs et finalement

$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$

**Exercice :**

Considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \quad v_0 = b \quad 0 < a < b < 2a \\ u_n v_n = ab \qquad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(0 < u_n < v_n)$
2. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante et que la suite $(v_n)_n$ est décroissante
3. a) Montrer $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\left(v_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(v_n - u_n)\right)$

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_n - u_n)$

   c) Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes
4. Déterminer les limites des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.