ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE (1)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{x}+1}\right)$

1) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

2) a) calculer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

   b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) a) montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$

   b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

4) montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle I à déterminer

5) tracer dans un même repère les courbes (C_f) et $(\Gamma_{f^{-1}})$

EXERCICE (2)

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \arctan\left(x\sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2-1}}\right) & x^2 \neq 1 \\ f(1) = \dfrac{\pi}{2} \quad ; \quad f(-1) = \dfrac{-\pi}{2} \end{cases}$

1) déterminer le domaine de définition D_f puis calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier la dérivabilité de f à gauche de 0 et à droite de 1 et -1

3) Calculer $f'(x)$ puis donner le tableau de variation de f

4) soit g la restriction de la fonction f sur $[-1,0]$

a) Montrer que g est une bijection de $[-1,0]$ vers un intervalle J que l'on précisera

b) exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

EXERCICE (3)

soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1+\sqrt[3]{x^3-2x^2} & ; \quad x \geq 2 \\ f(x) = \dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}\right) & ; \quad x < 2 \end{cases}$

1) a) étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$

   b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point 2

2) calculer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$

3) calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

4) a) calculer la fonction dérivée sur $]-\infty,2[$ et $]2,+\infty[$

   b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty,2[$

   a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty,2[$ vers un intervalle J que l'on précisera

   b) exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE (4)

on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \arctan\sqrt{x+2} & ; \quad x \geq -2 \\ f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 + 2x} & ; \quad x < -2 \end{cases}$

1) a) montrer que f est continue au point -2

b) étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite du point -2

2) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) a) calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,-2[$ et $]-2,+\infty[$

b) étudier les variations de f et dresser sa table de variation

4) a) montrer que $(\forall x \in]-\infty,-2[)\ f(x) \geq 2x + 3$

b) tracer la courbe (C_f)

5) soit g la restriction de la fonction f sur $]-\infty,-2[$

a) Montrer que g est une bijection de $]-\infty,-2[$ vers un intervalle J à déterminer

b) calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J

c) tracer dans le repère précédant la courbe de la fonction réciproque g^{-1}

6) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $[1,2]$

b) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $\arctan x \leq x$

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $1 < U_n \leq 2$

d) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$ puis déduire qu'elle est convergente et déterminer sa limite

EXERCICE (5)

I] on considère la fonction h définie sur $]-\infty,0[$ par : $h(x) = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x-1}{x^2+1}$

1) calculer $h'(x)$ et montrer que h set strictement décroissante

2) déduire que $(\forall x < 0)$ $h(x) < 0$

3) montrer que $(\forall x < 0)$ $x < \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$

II] soit f la fonction définie sur $]-\infty,0]$ par : $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

ETUDE DE FONCTIONS

1) a) montrer que f est continue à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à gauche du point 0

2) a) calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

b) étudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) montrer que $(\forall x<0)$ $f'(x) = (x-1)h(x)$ puis dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f)

(on donne (C_f) coupe la droite $(\Delta)\, y = x-2$ en un point d'abscisse $\alpha \simeq -0,5$

Et (C_f) est situer au dessous de (Δ) dans $]-\infty;\alpha[$)

EXERCICE (6)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} - Arc\tan(\sqrt{x})$

1) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier le sens de variation de la fonction f

3) on considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{Arc\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

a) déterminer D_g

b) déterminer les limites de g aux bornes de D_g

c) étudier la dérivabilité de g à droite de 0 puis donner une interprétation géométrique du résultat

d) calculer $g'(x)$ et étudier les variations de la fonction g

5) soit h la restriction de g sur $[0;1[$. montrer que h est une bijection de $[0;1[$ vers un intervalle à déterminer

6) tracer les courbes (C_g) et $(C_{h^{-1}})$

Etudier les fonctions :

1) $f(x) = \sqrt{1+x^2}\arctan x$

2) $f(x) = |x-1| + \arctan|x|$

3) $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}\right)$ $si \quad x<1 \quad et \quad f(1) = \frac{\pi}{2}$

4) $f(x) = x\arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$

5) $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$