PROF: ATMANI NAJIB 2BAC SM BIOF

LA DERIVATION – APPLICATIONS *Etude de fonctions*

I) MONOTONIE ET EXTREMUMS D'UNE FONCTION CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION *(rappelles)*

Propriété1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$
Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

Propriété2 : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

Propriété3 :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.
2) Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.
3) Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Propriété4 : Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

Propriété5 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exemple1 : Soit $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0 \quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$\forall x\in D_f-\{0;1\}$: $f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=x'\sqrt{x^2-x}+x\dfrac{\left(x^2-x\right)'}{2\sqrt{x^2-x}}$

$$f'(x)=\sqrt{x^2-x}+x\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2-x}\succ 0 \quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2-3x$

Le tableau de signe de : $4x^2-3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x)\succ 0 \quad \forall x\in]1;+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Exemple : Soit $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R} \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=x^2+x-2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de x^2+x-2

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9$ deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=-2$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x)=3x^2-2x+1$ 2) $g(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-1$

3) $h(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6x-2=2(3x-1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x-1$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)\geq 2/3$

1) $D_g=\mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$

Puisque : $g'(x)\geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x)=\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ $\quad x\in D_h\Leftrightarrow x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$

$D_h=\mathbb{R}-\{1\}=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$\forall x\in D_h\ :\ h'(x)=\frac{(2x+1)'(x-1)^2-2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$

$h'(x)=\frac{3(x+1)}{(x-1)^3}=\frac{3}{(x-1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}$

Puisque: $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}\ \frac{3}{(x-1)^2}\succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ -\infty$	$\nearrow$	-1

h' s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative c'est $-1/4$ en -1

Exercice : Soit la fonction : $f(x)=4x^3-3x^2-6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3=\left[-\frac{1}{2};1\right]$

Solution : 1) $D_f=\mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=6(2x^2-x-1)=6(x-1)(2x+1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-\dfrac{1}{2}$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante

sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\dfrac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\dfrac{7}{4}$ donc :

$\forall x\in I_1$: $f(x)\leq \dfrac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l'intervalle : $I_1=]-\infty;1]$ par $\dfrac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante

sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x\in I_2$: $-5\leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

Exercice : Soit la fonction f définie sur $I=[0;\pi]$ par : $f(x)=\sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x\in[0;\pi]$

$f'(x)=\left(\sin^2 x\right)'=2(\sin x)'(\sin x)^{2-1}=2\cos x\sin x$

$f'(x)=\sin 2x \Rightarrow f''(x)=2\cos 2x \quad \forall x\in[0;\pi]$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$

Et $k\in\mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x=\dfrac{\pi}{4}$ et $x=\dfrac{3\pi}{4}$

$x\in[0;\pi] \Rightarrow 2x\in[0;2\pi]$

$2x$	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos 2x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{4};\pi\right]$

(C_f) est concave sur $\left[\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

II) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Propriété1 : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

La droite (Δ): $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a)$(\forall x\in D_f)(2a-x\in D_f)$

b)$(\forall x\in D_f)(f(2a-x)=f(x))$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x-x^2}$ 1)Déterminer D_f

2) montrer que la La droite (Δ): $x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution :1) On a : $f(x)=\sqrt{x-x^2}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\,x-x^2\geq 0\right\}$

$x-x^2=0 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=1 ou x=0$

Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc : $D_f=[0,1]$

2)a) montrons que : si $x\in D_f=[0,1]$ alors

$1-x\in D_f$?

$x\in D_f=[0,1]\Rightarrow 0\le x\le 1\Rightarrow -1\le -x\le 0\Rightarrow 1-1\le 1-x\le 1$

Donc : $x\in D_f\Rightarrow 0\le 1-x\le 1\Rightarrow 1-x\in D_f$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)$????

$f(1-x)=\sqrt{(1-x)-(1-x)^2}=\sqrt{1-x-(1-2x+x^2)}$

$=\sqrt{1-x-1+2x-x^2}=\sqrt{x-x^2}=f(x)$

Donc : La droite (Δ): $x=\dfrac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.

Le point $\Omega(a,b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $(\forall x\in D_f)(2a-x\in D_f)$

b) $(\forall x\in D_f)(f(2a-x)=2b-f(x))$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sin x-\cos x$. Montrer que le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\dfrac{\pi}{4}-x=\dfrac{\pi}{2}-x\in\mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)$??

$f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x-\sin x$

donc $f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\dfrac{\pi}{4};0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

III) DEMI-TANGENTE VERTICALE

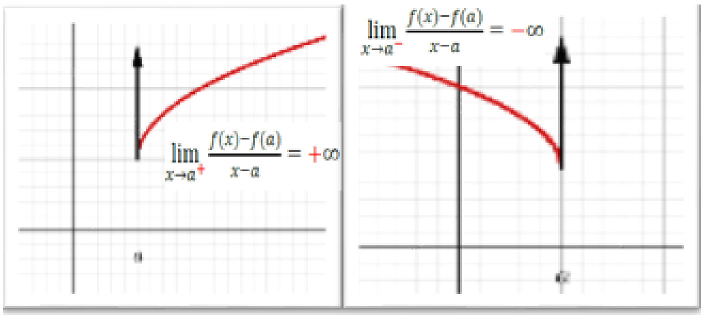
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$

Si f est continue à droite de a et

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=x^2\sqrt{1+x}$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0=-1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f=[-1,+\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\sqrt{1+x}-0}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\sqrt{1+x}}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2\left(\sqrt{1+x}\right)^2}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}}=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$

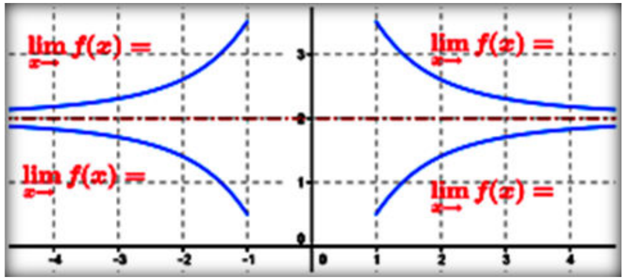
Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0=-1$.

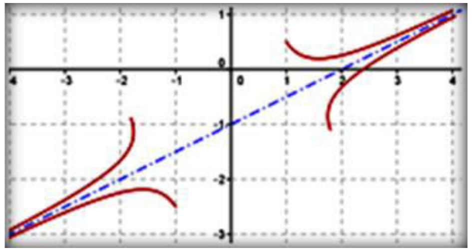
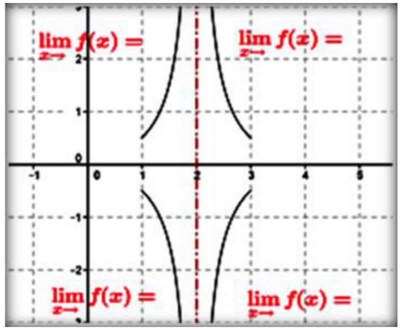
2)Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1;f(-1))$ dirigée vers le haut

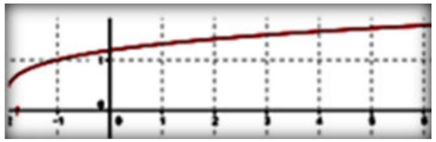
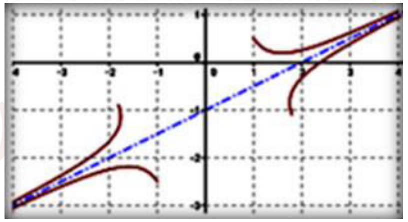
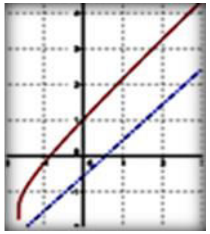
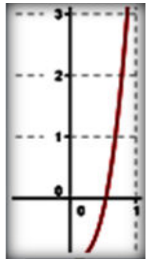
Car : $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}=+\infty$ $(+\times+=+)$

IV)BRANCHES INFINIES.

<table>
<tr><th>Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$</th><th>Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</th><th>Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$</th></tr>
<tr>
<td>

La droite (Δ) d'équation $y=b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞</td>
<td>La droite $(\Delta): y = ax+b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$

(C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)>0$
(C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)<0$</td>
<td>

La droite (Δ) d'équation $x=a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="4">Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$</td><td colspan="2">Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$</td><td rowspan="2">Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$</td><td>$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\infty$</td></tr>
<tr>
<td>
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)</td>
<td>
La droite (Δ) d'équation $y = ax+b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞ .</td>
<td>
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$</td>
<td>
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)</td>
</tr>
</table>

V) ETUDE DE FONCTIONS :

Exemple1 **:**soit f une fonction définie par :

$f(x)=2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) étudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

3) étudier la position de courbe $\left(C_f\right)$avec son asymptote horizontal

4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

5) déterminer les points d'intersections de$\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses f

6) montrer que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de$\left(C_f\right)$

7) tracer la courbe $\left(C_f\right)$

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

donc : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) étude des branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=2$

Car : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$

La droite (Δ): $y=2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b) on a $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0} 2-\frac{1}{x-1}=3$

donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

donc La droite (Δ'): $x=0$ est une asymptote a la courbe C_f

c) on a $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{-1}{x-1}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-1}{x-1}=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to1} 2+\frac{1}{x}=3$

donc $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

donc La droite (Δ ''): $x=1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe $\left(C_f\right)$avec son asymptote horizontal :$\left(\forall x\in D_f\right)$

$f(x)-2=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x}{x(x-1)}=\frac{-1}{x(x-1)}$

si $x\in\left]0;1\right[$ alors $f(x)-2\succ 0$

Donc la courbe C_f est au- dessus de (Δ): $y=2$

si $x\in\left]-\infty;0\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ alors $f(x)-2\prec 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y=2$

5) déterminons les points d'intersections de$\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses : $\left(\forall x\in D_f\right)$

$f(x)=0\Leftrightarrow 2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=0\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{x(x-1)}=0$

$2x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Donc les points d'intersections de$\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};0\right)$et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de$\left(C_f\right)$:

On a : $D_f=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

a) si $x\in D_f$ alors$1-x\in D_f$ en effet :

$x\in\mathbb{R}-\{0;1\}\Rightarrow x\neq 0$ et $x\neq 1$

$\Rightarrow -x\neq 0$ et $-x\neq -1\Rightarrow 1-x\neq 1$ et $1-x\neq 0$

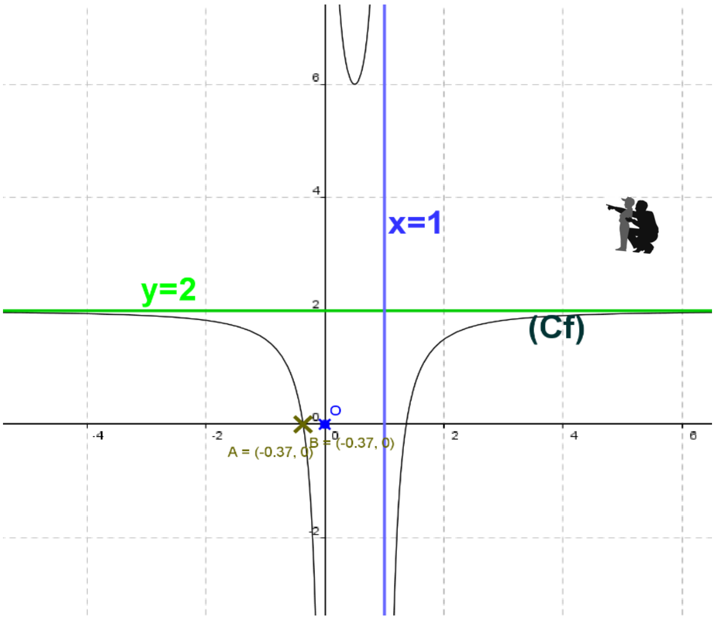
alors $1-x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

b) montrons que : $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$ ؟؟؟؟

$$f(1-x)=2+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x-1}=2+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$$

donc $f(1-x)=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;1\}$

donc la droite $x=\frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exemple2 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution :1) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-x-2\geq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times 2\times(-1)=1+8=9=(3)^2>0$

$x_1=-1$ **et** $x_2=2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$

2) on a : $\forall x\in D_f-\{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=x-\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x-2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-x-2}-x\right)}{\sqrt{x^2-x-2}-x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-2}{\sqrt{x^2-x-2}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1-\frac{2}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y=-x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étudie de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x+1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-x-2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x-2}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}=+\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1.0)$ et $B(2.0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$x^2-x-2\succ 0 \Leftrightarrow \forall x\in \left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

Donc :

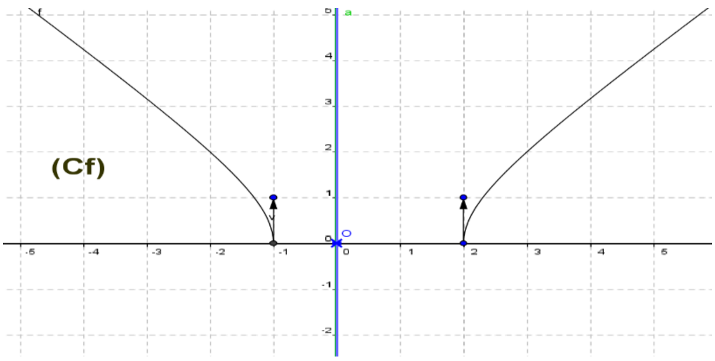
$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x-2}\right)'=\frac{\left(x^2-x-2\right)'}{2\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-2}}\quad \forall x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x-1$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exemple3 : soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x-1+3\sqrt[3]{1-x};si...x\le 1\\ f(x)=(x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right);si...1\succ x\end{cases}$

(C_f) La courbe de f dans un repére orthonormé

1)a)monter que f est continue en $x_0=1$

b) étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une Interprétation géométrique du résultat :

2)a) calculer les limites suivantes :

$\lim_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

b) monter que la courbe de f admet une asymptote oblique d´équation $(\Delta): y=x$ au voisinage de $+\infty$

c)Étudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $-\infty$

3)a)étudier les variations de f sur $I=\left]-\infty;1\right[$

b) donner le tableau de variation de f' sur $K=\left[1;+\infty\right[$ et en déduire les variations de f sur K

4) soit g la restriction de f sur $J=\left]-\infty;0\right]$

a)Montrer que g est une bijection de J vers un intervalle L que l'on déterminera

b) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équations suivante : $t^3-3t-2=0$ et déterminer : $g^{-1}(-2)$ et $\left(g^{-1}\right)'(-2)$

c)Représenter (C_f) et $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repére orthonormé.

Solution :on a $f(1)=0$

1)a) $\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right)=0=f(1)$

Donc f est continue à droite en $x_0=1$

$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-} x-1+3\sqrt[3]{1-x}=0=f(1)$

Donc f est continue à gauche en $x_0=1$

Donc f est continue en $x_0=1$

• b) étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$

$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}1+\arctan\frac{1}{x}=1+\frac{\pi}{4}$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=1$ et $f'_d(1)=1+\frac{\pi}{4}$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente à droite

de A(1, 0).de coefficient directeur $f'_d(1)=1+\frac{\pi}{4}$

d'équation: $y=f(1)+f'_d(1)(x-1)$ avec $x\ge1$

$y=0+\left(1+\frac{\pi}{4}\right)(x-1)\Leftrightarrow(T_d):y=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)(x-1)$

avec $x\ge1$

• étude de la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$

$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1+3\sqrt[3]{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}1+3\frac{\sqrt[3]{1-x}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1^-}1-3\sqrt[3]{\frac{1}{(1-x)^2}}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une demie tangente vertical a gauche de A(1, 0)

2)a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+3\sqrt[3]{1-x}$

$=\lim_{x\to-\infty} x-1-3x\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}=\lim_{x\to-\infty}-1+x\left(1-3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}\right)$

On a $\lim_{x\to-\infty}3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}=0$ donc $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right)=+\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty}x-1=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}1+\arctan\frac{1}{x}=1$

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}(x-1)\left(1+\arctan\frac{1}{x}\right)-x=$

$=\lim_{x\to+\infty}x\arctan\frac{1}{x}-1-\arctan\frac{1}{x}$

On a : $\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{1}{x}=0$ on calcule $\lim_{x\to+\infty}x\arctan\frac{1}{x}=??$

On pose : $t=\arctan\frac{1}{x}$ donc : $\tan t=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{\tan t}$

$x\to+\infty\Leftrightarrow t\to0^+$

$\lim_{x\to+\infty}x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\tan t}=1$

Donc : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=0$

Donc :la courbe de f admet une asymptote oblique d´équation $(\Delta):y=x$ au voisinage de $+\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}1-\frac{1}{x}-3\sqrt[3]{\frac{1-x}{(-x)^3}}=1$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}-1+3\sqrt[3]{1-x}=+\infty$

la courbe de f admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(\Delta):y=x$ au voisinage de $-\infty$

3)a)étude des variations de f sur $I=]-\infty;1[$

On a : $f(x)=x-1+3\sqrt[3]{1-x}$ si $x\prec1$ est dérivable sur $I=]-\infty;1[$ (la somme de fonctions dérivables) sur I

$\forall x\in]-\infty;1[\quad f'(x)=1+3\times\frac{1}{3}(1-x)'(1-x)^{-\frac{2}{3}}=1-(1-x)^{-\frac{2}{3}}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{(1-x)^2}-1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$$

et puisque : $\sqrt[3]{(1-x)^2}\succ 0 \quad \forall x\in\left]-\infty;1\right[$ le signe de

$f'(x)$ est celui de : $\sqrt[3]{(1-x)^2}-1$

$\sqrt[3]{(1-x)^2}\geq 1\Leftrightarrow (1-x)^2\geq 1\Leftrightarrow (1-x)^2-1\geq 0$

$\Leftrightarrow -x(2-x)\geq 0$

TV :de variations de f

x	$-\infty$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

b)on a f est dérivable sur $K=\left[1;+\infty\right[$ (la somme de fonctions dérivables sur K)

$\forall x\in K=\left[1;+\infty\right[\quad f'(x)=1+\arctan\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+1}$

donc f' est dérivable sur K(la somme de fonctions dérivables sur K)

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{-(2x+1)}{(x^2+1)^2}\prec 0 \quad \forall x\in K=\left[1;+\infty\right[$$

donc f' est décroissante sur K

et puisque f' est continue sur K alors :

$$f'(K)=\left]\lim_{x\to+\infty}f';f'(1)\right]=\left]1;1+\frac{\pi}{4}\right] \text{ donc } f'(x)\succ 0$$

$\forall x\in K=\left[1;+\infty\right[$ donc f est croissante sur K

Le tableau de variation de f' sur $K=\left[1;+\infty\right[$ est :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4)a)on a : $g(x)=f(x)=x-1+3\sqrt[3]{1-x} \quad \forall x\in J$

D'après les questions précédentes on a g est continue et strictement croissante sur J alors

g est une bijection de J vers un l'intervalle

$$K=g(J)=\left]\lim_{x\to-\infty}g;g(0)\right]=\left]-\infty;2\right]$$

b)on a t=2 est une solution de l'équation :

$t^3-3t-2=0$ la division euclidienne donne :

$t^3-3t-2=(t-2)(t+1)^2$

une solution de l'équation : $t^3-3t-2=0$ dans $\mathbb{R}^+$

est $S=\{2\}$

on pose : $g^{-1}(-2)=x\Leftrightarrow -2=g(x)$ et $x\in J$

donc : $x-1+3\sqrt[3]{1-x}=-2$ et $x\in J$

on pose : $t=\sqrt[3]{1-x}$ donc : $t^3-3t-2=0$ et $t\geq 1$

D'après les questions précédentes : $t=2$

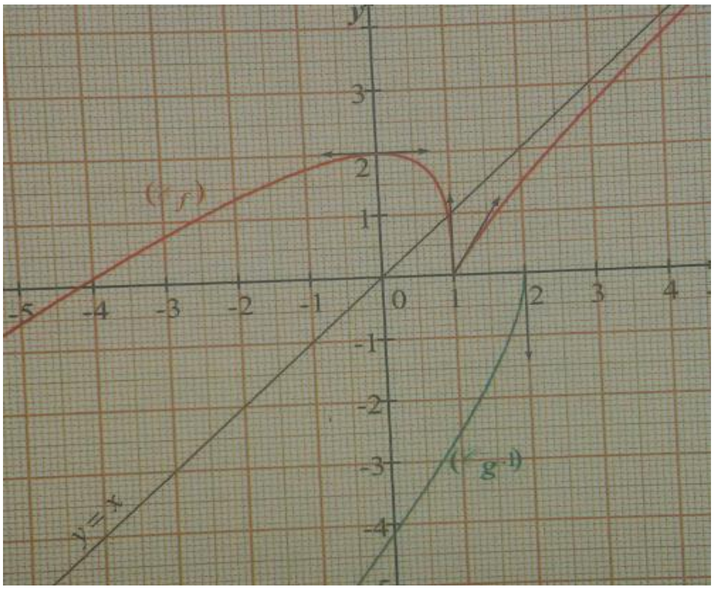
Donc : $x=1-t^3=-7$ donc : $g^{-1}(-2)=-7$

Et puisque : $g'(-7)\neq 0$ alors on a :

$$\left(g^{-1}\right)'(-2)=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(-2)\right)}=\frac{1}{g'(-7)}$$

Et puisque : $g'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$

Alors : $g'(-7)=\dfrac{3}{4}$ donc : $\left(g^{-1}\right)'(-2)=\dfrac{4}{3}$



Exemple4 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T=\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(\pi+x)=2\cos\left(2(\pi+x)+\dfrac{\pi}{4}\right)=2\cos\left(2x+2\pi+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$f(\pi+x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T=\pi$

<u>Remarque :</u> la fonction : $x\to\cos(ax+b)$ est périodique de période $T=\dfrac{2\pi}{|a|}$ si $a\neq 0$

<u>Un domaine d'étude de f</u>

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=\pi$ donc par exemple : $D_E=[0;\pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f'(x)=2\times -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

$$x\in[0;\pi]\Leftrightarrow 0\le x\le\pi\Leftrightarrow\frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.Le tableau de signe de $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$		π		2π		$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{8}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f :on deduit que

Que f change de signe en sur les intervalles $\left[0;\dfrac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\dfrac{3\pi}{8};\dfrac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I=\left[0;\dfrac{7\pi}{8}\right]$ l'équation : $f(x)=0$

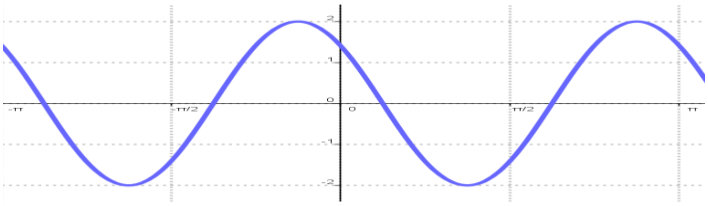
On a : $\begin{cases} f(x)=0 \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \frac{\pi}{4}\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2} ou 2x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2} \\ x\in I \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8} ou. x=\frac{5\pi}{8}$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle $D_E=[0;\pi]$

Et on deduit le reste par les translations de

vecteurs $k\pi\vec{i}\quad k\in\mathbb{Z}$



Exemple5 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0;\pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de

variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$ car $2+\cos x\neq 0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) <u>Un domaine d'étude de</u> f

a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

) $f(2\pi+x)=\frac{\sin(2\pi+x)}{2+\cos(2\pi+x)}=\frac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$T=2\pi$ donc par exemple : $D=[-\pi;\pi]$

Etudions la parité de f ?

$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\frac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$ Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E=[0;\pi]$

3) f est dérivable sur $D_E=[0;\pi]$ et $\forall x\in D_E$

on a :

$f'(x)=\frac{\cos x(2+\cos x)+\sin x\times\sin x}{(2+\cos x)^2}=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

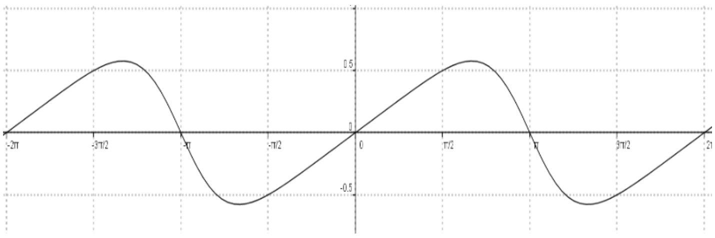
Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;\pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x+1$

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow \cos x\ge -\frac{1}{2}$ Et $x\in[0;\pi]$ Donc :

$2\cos x+1\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0



Exercice: soit f une fonction définie par :

$f(x)=4\sin x+\cos 2x$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période

$T=2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de

variation de f

4)donner l'équation de la tangente (T) a la courbe

de f en en $x_0=0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6)déterminer les points d'inflexions de la courbe(C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$

Solution :1) $D_f=\mathbb{R}$

2)a)si $x\in\mathbb{R}$ alors $2\pi+x\in\mathbb{R}$

b) $f(2\pi+x)=4\sin(x+2\pi)+\cos(2(x+2\pi))$

$f(2\pi+x)=4\sin x+\cos(2x)=f(x)$

Donc : f est périodique de période $T=2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T=2\pi$

donc par exemple : $D_E=[0;2\pi]$

f est dérivable sur $D_E=[0;2\pi]$ et $\forall x\in D_E$

on a : $f'(x)=4\cos x-2\sin(2x)=4\cos x-4\cos x\sin x$

$f'(x)=4\cos x(1-\sin x)$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E=[0;2\pi]$

On a : $1-\sin x\geq 0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow \cos x(1-\sin x)=0\Leftrightarrow \cos x=0.ou.1-\sin x=0$

$1-\sin x=0\Leftrightarrow \sin x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$ Donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) a la courbe de f

en en $x_0=0$ est : $y=f(0)+f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0)=4$ et $f(0)=1$ donc : $y=4x+1$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x)=4\cos x-2\sin(2x)$ Donc : $\forall x\in\mathbb{R}$

$f''(x)=-4\sin x-4\cos(2x)=-4\sin x-4(1-2\sin^2 x)$

$f''(x)=8\sin^2 x-4\sin x-4=4(\sin^2 x-\sin x-1)$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E=[0;2\pi]$

On pose : $X=\sin x$ donc : $X\in[-1;1]$ et l'équation

$\sin^2 x-\sin x-1=0$ devient : $X^2-X-1=0$

$\Delta=9$ les solutions sont : $X_1=-\frac{1}{2}$ et $X_2=1$

Donc : $f''(x)=8(\sin x-1)\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)$

On a : $\sin x-1\leq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

$\sin x+\frac{1}{2}\leq 0\Leftrightarrow \sin x\leq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

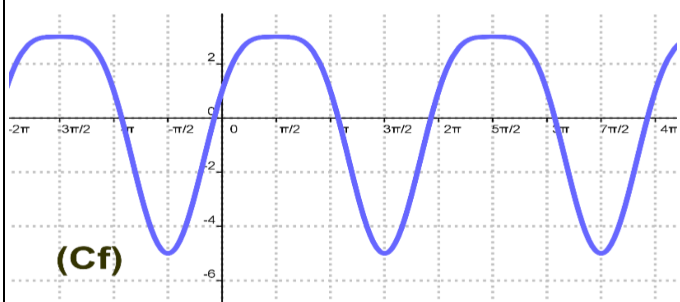
x	0		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc :(C_f)est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f)est concave sur $\left[0,\frac{7\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6},-\frac{3}{2}\right)$sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi;4\pi]$



C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien