

Exercices : Limite et continuité
Exercices d'applications et de réflexions

PROF: ATMANI NAJIB

2BAC SM BIOF

TD :Exercices: LIMITE ET CONTINUITE

Exercice1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

Exercice2 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Exercice3: Déterminer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

Exercice4 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

- 1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$
- 3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$
- 4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Exercice5 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-2x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \text{ et } f(2) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{x^2+x-12}{x-3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 3$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}; \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = m \end{cases}$$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle

f est continue en $x_0 = 1$

Exercice11 : Considérons la fonction f définie

$$\text{par : } f(x) = \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

(E désigne la partie entière)

$$1) \text{ Montrer que } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$$

2) f est-elle continue en $x_0 = 0$?

Exercice12 : Soit f définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(1) = 2 + x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Exercice13 : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2-3}{2x-1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

Exercice14 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Exercice15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2-1}{|x-1|}$ si $x \neq 1$

$$\text{Et : } f(1) = 2$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Exercice16 : Soit la fonction h définie par

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3x+2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2- Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \quad \text{a) Déterminer } D_f$$

b) Etudier la continuité de la fonction

f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Exercice17 : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{x} \quad \text{Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 18 : Soit la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{x^2+x-6}{x-E(x)} \quad (E \text{ désigne la partie entière})$$

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

Exercice 19 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) h(x) = \sqrt{x^2+x+3} \quad 2) g(x) = \frac{x^4+x^3-6}{x^2+2x-3}$$

$$3) t(x) = \tan x$$

Exercice 20 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \cos(2x^2-3x+4)$$

$$2) g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+\sin^2 x}} \quad 3) h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

Exercice 21 : Soit f et g deux fonctions définies

$$\text{par : } \begin{cases} f(x) = x+1; \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 0; \text{ si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } g(x) = 5$$

Montrer que f n'est pas continue en $x_0 = 0$ et

$h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes :

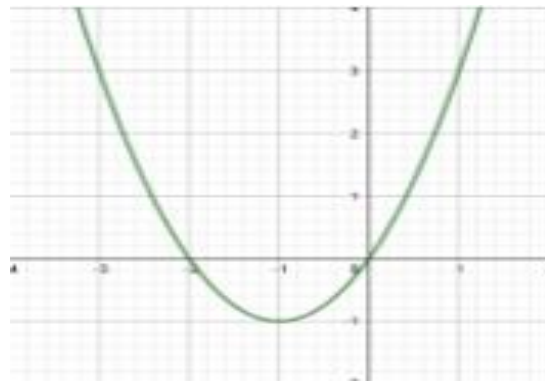
$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2} \pi\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2-4x+3}{4x^2+7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$$

Exercice24 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1, 2]$, $[0, 2[$, $]-1, 0]$

$[2, +\infty[$, $]-\infty, 1]$

Exercice25 : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \quad \text{Déterminer les images des}$$

intervalles suivants :

$[0, 1]$, $[-2, -1[$, $]-1, 1]$, $[2, +\infty[$

Exercice26 : Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants : $]-1; -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$

Exercice27 : Montrer que l'équation :

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Admet une racine unique dans $]-1; 0[$

Exercice28 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

Exercice29 : Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right]$$

Exercice30 : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R}

2) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}

Exercice31 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I =]-2; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Exercice32 : Soit f la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3) Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même

repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice33 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

Exercice34 : simplifier les expressions

$$\text{suivantes : } 1) (\sqrt[3]{2})^3 \quad 2) \sqrt[4]{4}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{512} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$4) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[3]{4} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \quad 6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt{\sqrt[5]{128}}} \quad 8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

Exercice35 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Exercice36 : résoudre dans \mathbb{R} :

$$1) \sqrt[5]{3x-4} = 2 \quad 2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

Exercice37 : calcules les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}}$$

Exercice38 : simplifier les expressions

$$\text{suivantes : } 1) A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

$$2) a) \text{ comparer : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$b) \text{ comparer : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$c) \text{ comparer : } \sqrt[5]{23} \text{ et } \sqrt[15]{151}$$

Exercice39 : 1) Rendre le dénominateur

$$\text{rationnel : } a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{5}} \quad d = \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$

Exercice40 : Déterminer la limite suivante :

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2-4}-2}{2x^2+x-3}$

Exercice41: 1) simplifier les expressions

suivantes : $A = \frac{\sqrt[5]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$

et $B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt{\sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[9]{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt{\sqrt[3]{3}}}$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

a) $\sqrt[3]{x-1} = 3$ b) $x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$

c) $\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$

2) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Exercice 42:

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $x^4 = 16$

2. Résoudre dans \mathbb{R} : $(x-1)^3 = -27$

Exercice 43 :

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$

3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Exercice 44 : Déterminer les réels suivants :

1) $a = \text{Arctan} \left(\tan \left(\frac{2007\pi}{5} \right) \right)$

2) $b = \tan \left(\text{Arctan} \left(\frac{2007\pi}{5} \right) \right)$

3) $c = \tan(\text{Arctan}(-1))$

4) $d = \text{Arctan}(\tan(-1))$

5) $e = \tan(\text{Arctan}(\sqrt{123}))$

Exercice 45 : on considère les nombres

suivants : $a = \text{Arctan} \frac{1}{2}$ et $b = \text{Arctan} \frac{1}{5}$

et $c = \frac{\pi}{4} - \text{Arctan} \frac{1}{8}$

1) montrer que : $\tan(a+b) = \tan c$

2) En déduire que :

$\text{Arctan} \frac{1}{2} + \text{Arctan} \frac{1}{5} + \text{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

Exercice46 : Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$; si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et est-ce que f est continue sur \mathbb{R}

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Exercice 47: Considérons la fonction f définie

par : $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$; si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

2) Etudier la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}

Exercice48 : soient f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} tels que f est bornée et g continue sur \mathbb{R} ; Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur \mathbb{R}

Exercice 49: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a; b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des

nombre de l'intervalle $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a; b]$

Exercice50 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que :

$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Montrer que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

Exercice 51: Considérons la fonction f continue Sur l'intervalle $[a; b]$ tel que : $f(a) < 0$

il existe $x_0 \in]a; b[$ tel que : $f(x_0) = \frac{a - x_0}{b - x_0}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

