

Exercices avec solutions : LIMITES ET CONTINUITÉ

Exercice 1 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$

Solution : Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon)$?

$$\text{Soit } I = \left] 1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} \right[= \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[$$

$$x \in \left] 1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} \right[\text{ donc}$$

$$|f(x) - 6| = |2x^2 + 3x - 5| = |x - 1||2x + 5|$$

$$x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[\text{ donc } |x - 1| < \frac{1}{2}$$

$$x \in \left] \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right[\text{ donc } \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ donc } 6 < 2x + 5 < 8$$

$$\text{donc } |2x + 5| < 8 \text{ donc } |2x + 5||x - 1| \leq 8|x - 1|$$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$$0 < |x - 1| < \alpha \Rightarrow |f(x) - 6| < \varepsilon$$

Pour avoir $|f(x) - 6| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $8|x - 1| < \varepsilon$

$$\text{et } |x - 1| < \frac{1}{2} \text{ cad } |x - 1| < \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } |x - 1| < \frac{1}{2}$$

Il suffit de prendre α le plus petit des

$$\text{nombres : } \frac{\varepsilon}{8} \text{ et } \frac{1}{2} \text{ cad } \alpha = \inf \left(\frac{\varepsilon}{8}; \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 6$$

Exercice 2 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2 - 1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution :

Déterminons $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

Exercice 3: Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Solutions : } 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5x^2 - 7x^4}{x - 10x^2 + 14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 8x^2 - 2x^5}{x^2 + 2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x \quad ?$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

on trouve une forme indéterminée : "+∞ - ∞"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} + x} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}$$

6) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$ On pose $x - \frac{\pi}{4} = h$

donc $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right)}{h}$$

or : $\tan \left(h + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

Exercice4 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1) Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

Et on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$ donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) ?$ et $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1 = \sqrt{3}+1$ et $\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1 = -17$ et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+$ donc : $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1 = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$

4) $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	+	0	-	0

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

Exercice5 : Considérons la fonction f définie

par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x-1}; \text{ si } \dots x \neq 1 \\ f(1) = -4 \end{cases}$$

Etudier la f est continuité de f en $x_0 = 1$

Solution :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x - 5 = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

donc f est continue en $x_0 = 1$

Exercice6 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-2)}{x^2 - 2x} & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Etudier la f est continuité de f en $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x-2}{x-2}\right) = \frac{1}{2} = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 2$

Exercice7 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

Etudier la f est continuité de f en $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \text{ donc :}$$

$$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 = f(0)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice8 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}; \text{ si } x \neq 3 \text{ et } f(3) = 7$$

Etudier la f est continuité de f en $x_0 = 3$

$$\text{Solution : on a : } f(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3} = x + 4 \text{ D.EC}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} x + 4 = 7 = f(3)$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 3$

Exercice9 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x}; \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

Etudier la f est continuité de f en $x_0 = 0$

Solution :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{(\sqrt{x+1} + 1)\tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = f(0) \end{aligned}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

Exercice10 : Considérons la fonction f définie

$$\text{Par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = m & \end{cases}$$

avec m paramètre réel

déterminer la valeur du réel m pour laquelle f est continue en $x_0 = 1$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

on pose : $h = x - 1 \quad x \rightarrow 1 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(h+1))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi h + \pi)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin(\pi h)}{\pi h} \pi = -\pi \end{aligned}$$

donc f est continue en $x_0 = 1$ ssi $m = -\pi$

Exercice11 : Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right); \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}$$

(E désigne la partie entière)

$$1) \text{Montrer que } \left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$$

2) f est-elle continue en $x_0 = 0$?

Solution : 1) on a : $x - 1 < E(x) \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{3}{x} - 1 < E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{3}{x}$$

$$\text{Si } x > 0 : \frac{x}{2} \left(\frac{3}{x} - 1 \right) < \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right) \leq \frac{x}{2} \times \frac{3}{x}$$

$$\text{Cad : } \frac{3}{2} - \frac{x}{2} < f(x) \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{donc : } -\frac{x}{2} < f(x) - \frac{3}{2} \leq 0$$

donc : $\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$

Si $x < 0$: $\frac{x}{2} \times \frac{3}{x} \leq \frac{x}{2} E\left(\frac{3}{x}\right) < \frac{x}{2}\left(\frac{3}{x} - 1\right)$

Cad : $\frac{3}{2} \leq f(x) < \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$

donc : $0 \leq f(x) - \frac{3}{2} < -\frac{x}{2}$

donc : $\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*$

finalement : $\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$

2) on a $\left| f(x) - \frac{3}{2} \right| \leq \frac{|x|}{2}$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2} = 0$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2} \neq f(0)$

Donc : f est discontinue en $x_0 = 0$

Exercice12 : Soit f définie sur \mathbf{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = 2 + x; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

Solution : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0 = f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$

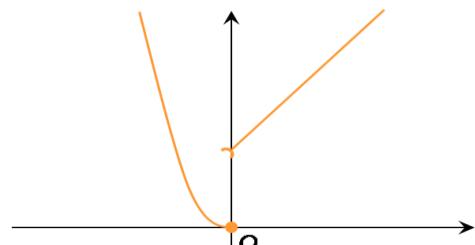
$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + x = 2 \neq f(0)$

donc f n'est pas continue à droite de 0

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

Donc, la limite en 0 n'existe pas.

f est discontinue en 0



Graphiquement : La courbe de f ne peut être tracée sur un intervalle comprenant 0, « sans lever le crayon ».

Exercice13 : Soit f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 3 - x^2; \text{ si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 1}; \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de $x_0 = 0$

Solution : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 3}{2x - 1} = 3 = f(0)$

donc f est continue à droite de $x_0 = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 = f(0)$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 0$

Exercice14 : Considérons la fonction f définie

Par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+1}{7-3x}; \text{ si } ...x \leq 2 \\ f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}; \text{ si } ...x > 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

Solution : on a : $f(2) = \frac{2 \times 2 + 1}{7 - 3 \times 2} = \frac{5}{7 - 3 \times 2} = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 3 = 5 = f(2)$

Donc f est continue adroite de f en $x_0 = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+1}{7-3x} = \frac{5}{1} = 5 = f(2)$

Donc f est continue gauche en $x_0 = 2$

Donc f est continue en $x_0 = 2$

Exercice15 : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ si $x \neq 1$

Et : $f(1) = 2$

Etudier la continuité de f en $x_0 = 1$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} x + 1 = 2 = f(1)$

donc f est continue à droite de $x_0 = 1$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -(x + 1) = -2 \neq f(1)$

donc f n'est pas continue à gauche de $x_0 = 1$

donc f n'est pas continue en $x_0 = 1$

donc f est discontinue en $x_0 = 1$

Exercice16 : Soit la fonction h définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

2- Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, f est-elle continue en $x_0 = -1$?

3- Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases}$$

a) Déterminer D_f

b) Etudier la continuité de la fonction f en $x_0 = -1$ La fonction f s'appelle un prolongement par continuité de la fonction de f en -1

4- Peut-on prolonger f par continuité en $a = -2$

Solution : 1)

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq -2$$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-1; -2\}$

$$2) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{(x+1)(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 1}{x + 2} = 3$$

$-1 \notin D_f$ donc f n'est pas continue en $x_0 = -1$

$$3) \text{ a) } \begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 3 \end{cases} \text{ donc : } D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 3 = f(-1)$$

donc f est continue en $x_0 = -1$

$$4) \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 3x + 2} ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^3 + 1 = -7$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} x^2 + 3x + 2 = 0^- \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

Donc on ne peut pas prolonger f par continuité en $a = -2$

Exercice 17 : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x} \text{ Donner un prolongement par}$$

continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

$$\text{Solution : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times x = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Donc La fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Est une prolongement

par continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

Exercice 18 : Soit la fonction h définie par

$$h(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - E(x)} \text{ (} E \text{ désigne la partie entière)}$$

Peut-on prolonger h par continuité en $a = 2$?

Exercice 19 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3} \quad 2) g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3}$$

$$3) t(x) = \tan x$$

$$\text{Solution : } 1) h(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$$

$x^2 + x + 3$ Est continue sur \mathbb{R} car c'est une Fonction polynôme de plus ($\forall x \in \mathbb{R}$) ($x^2 + x + 3 \geq 0$) (Son discriminant Δ est négatif)

Donc h est continue sur \mathbb{R}

$$2) g(x) = \frac{x^4 + x^3 - 6}{x^2 + 2x - 3} \text{ est continue sur :}$$

$] -\infty, -3[$ et sur $] -3, 1[$ et sur $] 1, +\infty[$.

3) La fonction t est continue sur tous les intervalles de la forme : $]-\pi/2 + k\pi; \pi/2 + k\pi[$ (Où $k \in \mathbb{Z}$)

Exercice 20 : Etudier la continuité des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$$

$$2) g(x) = \sqrt{\frac{x}{1 + \sin^2 x}} \quad 3) h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

Solution : 1) Soit f une fonction définie par $f(x) = \cos(2x^2 - 3x + 4)$

Montrons que f est continue sur \mathbb{R}

Puisque les fonctions : $f_1 : x \rightarrow 2x^2 - 3x + 4$ et $f_2 : x \rightarrow \cos x$ sont continues sur \mathbb{R}

Et $f_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors : $f = f_2 \circ f_1$ est continue sur \mathbb{R}

2) Soit g une fonction définie par

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1+\sin^2 x}}$ Montrons que g est continue sur \mathbb{R}^+ . On a : $D_g = [0; +\infty[$ et Puisque la fonction :

$g_1 : x \rightarrow \frac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ et

$g_1(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ et $g_2 : x \rightarrow \sqrt{x}$ sont continues sur \mathbb{R}^+

Donc : $g = g_2 \circ g_1$ est continue sur \mathbb{R}^+

3) $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$ est continue sur \mathbb{R} car

$x \rightarrow x^2+1$ est continue sur \mathbb{R} et ne s'annule pas

sur \mathbb{R} donc : $x \rightarrow \frac{1}{x^2+1}$ est continue sur \mathbb{R}

et ($\forall x \in \mathbb{R}$) ($\frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}$) et \sin est continue sur \mathbb{R}

Exercice 21 : Soit f et g deux fonctions définies

par : $\begin{cases} f(x) = x+1; \text{ si } x < 0 \\ f(x) = 0; \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$ et $g(x) = 5$

Montrer que f est n'est pas continue en $x_0 = 0$ et $h = g \circ f$ est continue en $x_0 = 0$

Solution : on a $f(0) = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x+1 = 1 \neq f(0)$$

Et g est continue en $x_0 = 0$

mais on a : $(g \circ f)(x) = 5$ est continue en $x_0 = 0$

Exercice 22 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$$

Solution : 1) Soient : $f : x \rightarrow \frac{1-\cos x}{x^2}\pi$ et $g : x \rightarrow \sin x$

Puisque : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\pi = \frac{\pi}{2}$ g est continue sur \mathbb{R}

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$2) \text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}} = \pi$$

Et la fonction : $x \rightarrow \cos x$ continue en π

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\pi\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) = \cos \pi = -1$$

Exercice 23 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}}$$

$$\text{Solution : } 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \tan x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{3} \frac{\tan x}{x} = \frac{\pi}{3}$$

et Puisque : $x \rightarrow \cos x$ est continue sur \mathbb{R}

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{3}$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{\pi \tan x}{3x}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{4x^2} = \frac{\pi}{4}$$

et Puisque : $x \rightarrow \sin x$ est continue sur \mathbb{R}

Donc continue en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ donc :

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x^2 - 4x + 3}{4x^2 + 7}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

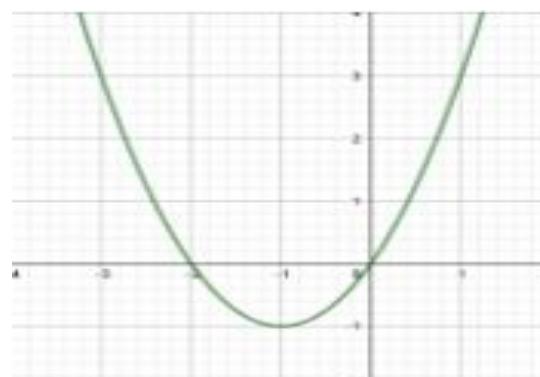
$$3) \text{on a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{0} \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x^2}{1-\cos x} = 4$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = 2$: $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue en 4

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 0} \sin\sqrt{\frac{2x^2}{1-\cos x}} = \sin 2 \text{ car : } x \rightarrow \sin x \text{ est}$$

continue en 2

Exercice 24 : Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction $f(x) = x^2 + 2x$



Déterminer graphiquement les images des intervalles : $[-1, 2]$, $[0, 2[$; $] -1, 0]$

$$[2, +\infty[;] -\infty, 1]$$

Solution : Graphiquement on a : $f([-1, 2]) = [-1, 3]$

$$f([0, 2[) = [-1, 0] \quad f([-1, 0]) = [0, 3[$$

$$f([2, +\infty[) = [0, +\infty[\quad f([-1, 1]) = [-1, +\infty[$$

Exercice25 : Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2x-3}{x+1} \quad \text{Déterminer les images des intervalles suivants :}$$

$$[0, 1] ; [-2, -1[;]-1, 1] ; [2, +\infty[$$

Solution : $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+3=5 > 0 \quad \text{donc : } f \text{ continue et}$$

strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; -1[$

$$\text{et }]-1; +\infty[\text{ donc on a : } f([0; 1]) = [f(0); f(1)] = \left[-3; \frac{-1}{2}\right]$$

$$f([-2; -1[) = \left[f(-2); \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) \right] = [7; +\infty[$$

$$f([-1; 1]) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x); f(1) \right] = \left[-\infty; \frac{-1}{2} \right]$$

$$f([2; +\infty[) = \left[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \left[\frac{1}{3}; 2 \right]$$

Exercice26 : Montrer que l'équation :

$$4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0 \text{ admet une racine dans chacune}$$

des intervalles suivants : $]-1; -\frac{1}{2}[;]-\frac{1}{2}; 0[$ et $]0; 1[$

Solution : on considère la fonction : g tel que

$$g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$$

• On a : g est continue sur \mathbb{R} (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur tout intervalle de \mathbb{R}

○ Et on a : $g(-1) = -\frac{3}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :

$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(-1) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_1 \in]-1; -\frac{1}{2}[$ tel que : $g(\alpha_1) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ donc :

$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(0) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_2 \in]-\frac{1}{2}; 0[$ tel que : $g(\alpha_2) = 0$

○ Et on a : $g(0) = -\frac{1}{2}$ et $g(1) = \frac{1}{2}$ donc :

$g(1) \times g(0) < 0$ donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha_3 \in]0; 1[$ tel que : $g(\alpha_3) = 0$

donc l'équation : $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet 3 racines

définies dans chacune des intervalles :

$$\left]-1; -\frac{1}{2}\right[; \left]-\frac{1}{2}; 0\right[\text{ et }]0; 1[$$

Exercice27 : Montrer que l'équation :

$$x^3 + x + 1 = 0$$

Admet une racine unique dans $]-1; 0[$

Solution : on considère la fonction : f tel que

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

• On a : f est continue sur \mathbb{R} (car c'est une fonction polynôme) donc continue sur $]-1; 0[$

• on a : $f(-1) = -1$ et $f(0) = 1$ donc :

$$f(1) \times f(-1) < 0$$

• $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur $]-1; 0[$ donc f strictement croissante sur $]-1; 0[$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]-1; 0[$

Exercice28 : Montrer que l'équation : $\cos x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = [0; \pi]$$

Solution : $\cos x = x \Leftrightarrow \cos x - x = 0$

On pose : $f(x) = \cos x - x$

• On a : f est continue sur \mathbb{R} (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = [0; \pi]$

• on a : $f(\pi) = -1 - \pi < 0$ et $f(0) = 1$ donc :

$$f(0) \times f(\pi) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha \in]0; \pi[$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Exercice29 : Montrer que l'équation : $1 + \sin x = x$

Admet au moins une racine dans intervalle :

$$I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$$

Solution : $1 + \sin x = x \Leftrightarrow 1 + \sin x - x = 0$

On pose : $f(x) = 1 + \sin x - x$

- On a : f est continue sur \mathbb{R} (car c'est la différence de deux fonctions continues) donc continue sur $I = \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$

- on a : $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4-\pi}{2} > 0$ et

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6+3\sqrt{3}-4\pi}{6} < 0 \text{ donc } f\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < 0$$

Donc : d'après le (T.V.I)

il existe $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ tel que : $f(\alpha) = 0$

Exercice30 : on considère la fonction : f tel que $f(x) = x^3 + x - 1$

1) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur \mathbb{R}

2) Montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0; 1[$

3) étudier le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}

Solution :

1)a) On a : f est continue sur \mathbb{R} (car c'est une fonction polynôme)

b) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur \mathbb{R} donc f strictement croissante sur \mathbb{R}

c) on a : $f(\mathbb{R}) = f(]-\infty; +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] =]-\infty; +\infty[$ et on a : $0 \in f(\mathbb{R})$

donc d'après le (T.V.I) l'équation l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R}

1) on a f est continue sur $[0; 1]$ et

$f(0) \times f(1) < 0$ ($f(0) = -1$ et $f(1) = 1$)

et f strictement croissante sur $[0; 1]$

Donc : d'après le (T.V.I) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\alpha \in]0; 1[$

3) étudions le signe de $f(x)$ sur \mathbb{R}

1cas : si $x \leq \alpha$ alors $f(x) \leq f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur \mathbb{R})

Donc $f(x) \leq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

2cas : si $x \geq \alpha$ alors $f(x) \geq f(\alpha)$ (car f strictement croissante sur \mathbb{R})

Donc $f(x) \geq 0$ (car $f(\alpha) = 0$)

Exercice31 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}$$

1) Montrer que la fonction g la restriction de f sur intervalle $I =]-2; +\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

Solution : 1) $f(x) = \frac{x-3}{x+2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)' = \frac{(x-3)'(x+2) - (x-3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1(x+2) - 1x(x-3)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{5}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	\nearrow	$+\infty$	$\nearrow 1$

puisque g est strictement croissante et continue sur : $I =]-2; +\infty[$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = g(I) = g(]-2; +\infty[) =]-\infty; 1[$

$$2) \begin{cases} g(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = g^{-1}(x) \\ x \in g(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in]-2; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \frac{y-3}{y+2} = x \Leftrightarrow y-3 = x(y+2)$$

$$\Leftrightarrow y - xy = 2x + 3 \Leftrightarrow y(1-x) = 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x+3}{1-x} \text{ Donc } g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

$$g^{-1} :]-\infty; 1[\rightarrow]-2; +\infty[$$

$$\text{Donc : } x \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2x+3}{1-x}$$

Exercice32 : Soit f la fonction définie sur

$$I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[\text{ par : } f(x) = \sqrt{2x-1}$$

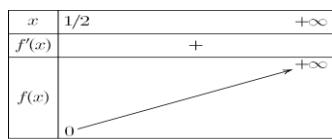
1) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.

2) Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle J

3) Représenter (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère orthonormé (o, \vec{i}, \vec{j})

Solution : 1) $D_f = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right] = I$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty \right] \quad f'(x) = (\sqrt{2x-1})' = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} > 0$$



Donc : f est strictement croissante et continue

sur : $\left[\frac{1}{2}; +\infty \right] = I$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1}

définie sur $J = f(I) = f\left(\left[\frac{1}{2}; +\infty \right]\right) = [0; +\infty[$

$$2) \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in [0; +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2y-1} = x \Leftrightarrow 2y-1 = x^2$$

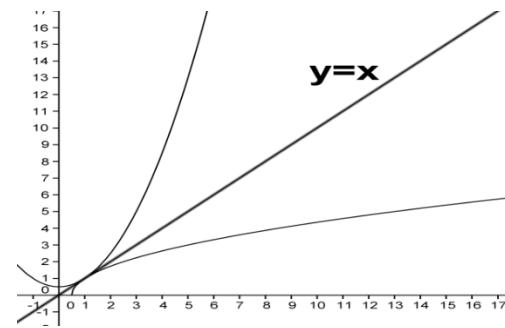
$$\Leftrightarrow 2y = x^2 + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc } f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$\text{Donc : } f^{-1} : [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{1}{2}; +\infty \right]$$

$$x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$$

3) $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à : $(\Delta) y = x$



Exercice33 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

Solutions : 1) $x^5 = 32$ donc $x > 0$

$$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{donc : } S = \{2\}$$

$$2) x^7 = -128 \text{ donc } x < 0$$

$$\text{Donc : } x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{-2\}$$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \emptyset$

Exercice34 : simplifier les expressions

$$\text{suivantes :} 1) (\sqrt[3]{2})^3 \quad 2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}}$$

$$3) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$4) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt{\sqrt[3]{4}} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} \quad 6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}}$$

$$7) E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{\sqrt[5]{128}}} \quad 8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{4}}}$$

$$\text{Solutions :} 1) (\sqrt[3]{2})^3 = 2 \quad 2) \sqrt[2]{\sqrt[4]{2}} = \sqrt[2]{2} = \sqrt[8]{2}$$

$$2) A = \sqrt[5]{32} - (\sqrt[7]{2})^7 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{512}} + \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}} = \sqrt[5]{2^5} - 2 + \sqrt[3]{\sqrt[3]{2^9}} + \sqrt[4]{\frac{96}{3}}$$

$$A = 2 - 2 + \sqrt[9]{2^9} + \sqrt[5]{32} = 2 - 2 + 2 + 2 = 4$$

$$3) B = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{16} \times \sqrt[6]{4} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}} = \frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[5]{2^4} \times \sqrt[6]{2^2} \times \sqrt[15]{2}}{\sqrt[15]{256}}$$

4)

$$B = \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{4}{2^5} \times \frac{2}{2^6} \times 2^{\frac{1}{15}}}{\sqrt[15]{2^8}} = \frac{\frac{1}{2^3} \times \frac{4}{2^5} \times \frac{1}{2^3} \times 2^{\frac{1}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = \frac{2^{\frac{23}{15}}}{2^{\frac{8}{15}}} = 2^{\frac{23-8}{15}} = 2^{\frac{15}{15}} = 2^1 = 2$$

$$5) C = \frac{(27)^{\frac{2}{9}} \times (81)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{(3^3)^{\frac{2}{9}} \times (3^4)^{\frac{1}{4}} \times (3^2)^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{17}{3}}} = \frac{3^{\frac{2}{3}} \times 3^1 \times 3^5}{3^{\frac{17}{3}}}$$

$$C = \frac{3^{\frac{20}{3}}}{3^{\frac{17}{3}}} = 3^{\frac{20-17}{3}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$$

$$6) D = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 128000000}{27^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^5 \times 2^7 \times 10^6}{(3^3)^2}} = \sqrt[6]{\frac{10^6}{3^6} \times 2^{12}} =$$

$$D = \sqrt[6]{\left(\frac{10}{3}\right)^6} \times \sqrt[6]{(2^2)^6} = \frac{10}{3} \times 2^2 = \frac{40}{3}$$

7)

$$E = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} = \frac{\sqrt[5]{2} \times \sqrt{2^3}}{\sqrt[10]{2^7}} = \frac{\sqrt[10]{2^2} \times \sqrt[10]{2^{15}}}{\sqrt[10]{2^7}}$$

$$= \frac{\sqrt[10]{2^{17}}}{\sqrt[10]{2^7}} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$$

$$8) F = \frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times (\sqrt{\sqrt{2}})^2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}}$$

$$F = \frac{\frac{1}{4^{\frac{1}{6}}} \times 8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{4}}}{2^{\frac{2}{6}}} = 2^{\frac{2+3+\frac{3}{2}+\frac{2}{4}-\frac{1}{3}}{3}} = 2^{\frac{7}{3}}$$

$$F = 2^{\frac{2+1}{3}} = 2^2 \times 2^{\frac{1}{3}} = 4\sqrt[3]{2}$$

Exercice35 : comparer : $\sqrt[5]{2}$ et $\sqrt[7]{3}$

Solutions : on a : $\sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}$

$$\sqrt[7]{3} = \sqrt[7 \times 5]{3^5} = \sqrt[35]{243} \quad \text{et} \quad \sqrt[5]{2} = \sqrt[7 \times 5]{2^7} = \sqrt[35]{128}$$

On a : $\sqrt[35]{243} > \sqrt[35]{128}$ car $243 > 128$

Donc : $\sqrt[7]{3} > \sqrt[5]{2}$

Exercice36 : résoudre dans \mathbb{R} :

$$1) \sqrt[5]{3x-4} = 2 \quad 2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0$$

Solutions :1)

$$\sqrt[5]{3x-4} = 2 \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3x-4})^5 = (2)^5 \Leftrightarrow 3x-4 = 32$$

$$\Leftrightarrow x=12 \quad \text{donc : } S=\{12\}$$

$$2) (\sqrt[5]{x})^2 - 5\sqrt[5]{x} + 6 = 0 \quad \text{on pose : } \sqrt[5]{x} = X$$

L'équation devient : $X^2 - 5X + 6 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2$$

Donc : $\sqrt[5]{x} = 3$ ou $\sqrt[5]{x} = 2$

Donc : $x = 243$ ou $x = 32$

Donc : $S = \{32; 243\}$

Exercice37 : calcule les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} \quad 6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2 - 2}}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 1}}{\sqrt{x-1}}$$

Solutions :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{x^3 + 24} = \sqrt[5]{2^3 + 24} = \sqrt[5]{8 + 24} = \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5 + 2x^3 - x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^5} = \sqrt[3]{+\infty} = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)'' \quad \text{FI}$$

On a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - 1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2} = \frac{1}{1+1 \times 1+1} = \frac{1}{3}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} = \left(\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right)'' \quad \text{FI}$$

On a : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x-8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 2^3}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{(x-8)((\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 2^2)} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + 2 \times \sqrt[3]{x} + 4} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned}
 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+3}}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x+6} - 2}{x-1} - \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+6-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2\right)} - \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{\left(\sqrt[3]{2x+6}\right)^2 + 2\sqrt[3]{2x+6} + 2^2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{12}
 \end{aligned}$$

6)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{\sqrt[6]{(x^2-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[6]{\frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2}} = 0$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^3}{(x^2-2)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}
 7) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt[4]{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-1)}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x+1 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x-1 = 0^+$$

Exercice38 : simplifier les expressions

$$\text{suivantes :} 1) A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}}$$

$$2) \text{a) comparer : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{b) comparer : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{c) comparer : } \sqrt[5]{23} \text{ et } \sqrt[15]{151}$$

Solutions :1)

$$A = \frac{\sqrt[3]{1024} \times \sqrt[5]{3200000}}{\sqrt[4]{64} \times \sqrt[3]{\sqrt{252}} \times \sqrt{18}} = \frac{\sqrt[3]{2^{10}} \times \sqrt[5]{2^{10} \times 10^5}}{\sqrt[4]{2^6} \times \sqrt[3]{\sqrt{2^8}} \times \sqrt{2 \times 3^2}}$$

$$A = \frac{2^{\frac{10}{3}} \times 2 \times 10}{2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = 20$$

$$2) \text{a) comparaison de : } \sqrt[5]{4} \text{ et } \sqrt[4]{3}$$

$$\text{on a } \sqrt[n \times m]{x^m} = \sqrt[n]{x^m}$$

$$\text{et on a : } \sqrt[4]{3} = \sqrt[4 \times 5]{3^5} = \sqrt[20]{243} \text{ et } \sqrt[5]{4} = \sqrt[4 \times 5]{4^4} = \sqrt[20]{256}$$

$$\text{donc } \sqrt[5]{4} > \sqrt[4]{3} \text{ car } 256 > 243$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[3]{28} \text{ et } \sqrt{13}$$

$$\text{on a } \sqrt[3]{28} = \sqrt[6]{28^2} = \sqrt[6]{784} \text{ et }$$

$$\sqrt{13} = \sqrt[2]{13} = \sqrt[2 \times 3]{13^3} = \sqrt[6]{2197}$$

$$\text{on a } \sqrt[6]{2197} > \sqrt[6]{784} \text{ car } \sqrt{13} > \sqrt[3]{28}$$

$$\text{b) comparaison de : } \sqrt[15]{151} \text{ et } \sqrt[5]{23}$$

$$\sqrt[5]{23} = \sqrt[15]{23^3} = \sqrt[15]{12167}$$

$$\text{Donc : } \sqrt[5]{23} > \sqrt[15]{151}$$

Exercice39 : 1) Rendre le dénominateur

$$\text{rationnel : } a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}} \quad d = \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1} - x$$

Solutions : 1)

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \text{ on utilise : } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2\right)}{(\sqrt[3]{2}-2)\left(\sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2\right)} = \frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^2 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2\right)}{\sqrt[3]{2}^3 - 2^3}$$

$$a = \frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2\right)}{-6} = -\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{2}^3 + 2\sqrt[3]{2} + 2^2\right)}{2}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2}-1)(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2} \times 1 + 1^2)}$$

$$b = \frac{\sqrt[3]{2}-1}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = \sqrt[3]{2}-1$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2})}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5^2}}{(\sqrt[3]{2})^3 - (\sqrt[3]{5})^3} = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25}}{3}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2}}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{5^2} + \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2^2})} = \frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{2})^3}$$

$$d = \frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}{3}$$

$$2) \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1} \text{ on utilise : }$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt[3]{x} - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \times 1 + 1)}{\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1}} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3 + 1} - x)(\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2)}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} + x\sqrt[3]{x^3 + 1} \times 1 + x^2} = 0$$

Exercice 40 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3}$$

$$\begin{aligned} \text{Solutions : } & \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - \sqrt[4]{16}}{2x^2 + x - 3} \\ & = \frac{20x^2 - 4 - 16}{(2x^2 + x - 3) \left(\sqrt[4]{(20x^2 - 4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)^2} \cdot 4 + \sqrt[4]{(20x^2 - 4) \cdot 16} + \sqrt[4]{16^3} \right)} \\ & = \frac{20(x+1)}{(2x+3) \left(\sqrt[4]{(20x^2 - 4)^3} + \sqrt[4]{(20x^2 - 4)^2} \cdot 4 + \sqrt[4]{(20x^2 - 4) \cdot 16} + \sqrt[4]{16^3} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x^2 - 4} - 2}{2x^2 + x - 3} = \frac{1}{8}$$

Exercice 41: 1) simplifier les expressions

$$\text{suivantes : } A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\text{et } B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3 \times \sqrt{9}}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt[4]{\sqrt{3}}}$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\text{a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \quad \text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0$$

2) Déterminer les limites suivantes :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$$

Solution :

$$A = \frac{\sqrt[15]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}} = \frac{(3^5)^{\frac{1}{15}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} \times \left(3^{\frac{1}{5}}\right)^3}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{5}}}$$

$$A = \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = \frac{3^{\frac{8}{5}}}{3^{\frac{1}{5}}} = 3^{\frac{8}{5} - \frac{1}{5}} = 3^{\frac{7}{5}} = (\sqrt[15]{3})^{37}$$

$$B = \frac{\sqrt[4]{9} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt{9}}{\sqrt[5]{81} \times \sqrt[4]{\sqrt{3}}} = \frac{(3^2)^{\frac{1}{4}} \times (3^4)^{\frac{1}{6}}}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \times 3}{(3^4)^{\frac{1}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}}$$

$$B = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{4}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}}} = 3^{\frac{3}{2}} \times 3^{-\frac{4}{5}} \times (3)^{\frac{1}{8}} = 3^{\frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{1}{8}} = 3^{\frac{11}{8} - \frac{4}{5}} = 3^{\frac{55}{40} - \frac{32}{40}} = 3^{\frac{23}{40}} = \sqrt[40]{3^{23}}$$

$$2) \text{ a) } \sqrt[3]{x-1} = 3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{x-1})^3 = 3^3 \Leftrightarrow x-1 = 27$$

$$\Leftrightarrow x = 28 \quad \text{donc : } S = \{28\}$$

$$\text{b) } x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 7x^{\frac{1}{3}} - 8 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{on pose : } & x^{\frac{1}{3}} = X \quad \text{donc : } X^2 - 7X - 8 = 0 \\ & \Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 1 \times (-8) = 49 + 32 = 81 > 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = \frac{7+9}{2 \times 1} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-9}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\text{Donc : } x^{\frac{1}{3}} = 8 \quad \text{ou} \quad x^{\frac{1}{3}} = -1$$

$$x^{\frac{1}{3}} = -1 \text{ n'a pas de solutions}$$

$$x^{\frac{1}{3}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = (8)^3 \Leftrightarrow x = 512$$

$$\text{Donc : } S = \{512\}$$

$$\text{c) } \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \quad \text{on a } x \geq 0$$

$$\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - 12 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2} - 12 = 0$$

$$\text{on pose : } \sqrt[6]{x} = X \quad \text{donc : } X^3 + X^2 - 12 = 0$$

on remarque que 2 est racine de cette équation

$$\text{donc : } X^3 + X^2 - 12 = (X-2)(X^2 + 3X + 6)$$

$$X^3 + X^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \quad \text{ou} \quad X^2 + 3X + 6 = 0$$

$$\Delta = -15 < 0 \quad \text{donc } X^2 + 3X + 6 = 0 \text{ n'a pas de solutions}$$

$$\text{Donc : } X = 2 \Leftrightarrow \sqrt[6]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^6 = 64$$

$$\text{Donc : } S = \{64\}$$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x^5} = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \text{ on a } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}{(x - 1)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left((\sqrt[3]{x})^3 - 1^3\right)}{(x - 1)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)\left((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\left((\sqrt[3]{x})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x} + 1^2\right)} = \frac{1}{1 + 1 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{(\sqrt[3]{x+1} - 1)\left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{(\sqrt[3]{x+1})^3 - (1)^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left((\sqrt[3]{x+1})^2 + 1 \times \sqrt[3]{x+1} + 1^2\right) = 1 \times 3 = 3$$

Exercice 42:

1. Résoudre dans \mathbb{R} : $x^4 = 16$
2. Résoudre dans \mathbb{R} : $(x - 1)^3 = -27$

Exercice 43 :

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation: $\sqrt[3]{x} - x = 0$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$$

3. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation :

$$\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$$

Exercice 44 : Déterminer les réels suivants :

- 1) $a = \arctan(\tan(\frac{2007\pi}{5}))$
- 2) $b = \tan(\arctan(\frac{2007\pi}{5}))$
- 3) $c = \tan(\arctan(-1))$
- 4) $d = \arctan(\tan(-1))$
- 5) $e = \tan(\arctan \sqrt{123})$

Solution : 1) on a si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\arctan(\tan x) = x$$

$$a = \arctan(\tan(\frac{2007\pi}{5}))$$

$$= \arctan(\tan(405\pi + \frac{2\pi}{5})) = \arctan(\tan(\frac{2\pi}{5}))$$

Et puisque : $-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ alors : $a = \frac{2\pi}{5}$

$$2) b = \tan(\arctan(\frac{2007\pi}{5})) = \frac{2007\pi}{5}$$

Car : $(\forall x \in \mathbb{R})(\tan(\arctan x) = x)$

$$3) c = \tan(\arctan(-1)) = -1$$

$$4) d = \arctan(\tan(-1)) = -1 \text{ car } -\frac{\pi}{2} < -1 < \frac{\pi}{2}$$

$$5) e = \tan(\arctan \sqrt{123}) = \sqrt{123}$$

Exercice 45 : on considère les nombres

suivants : $a = \arctan \frac{1}{2}$ et $b = \arctan \frac{1}{5}$

$$\text{et } c = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{8}$$

$$1) \text{montrer que : } \tan(a+b) = \tan c$$

2) En déduire que :

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Solution : 1) on a : $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \times \tan b}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan \arctan \left(\frac{1}{2}\right) + \tan \arctan \left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \tan \arctan \left(\frac{1}{2}\right) \times \tan \arctan \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}} = \frac{7}{9}$$

$$\tan c = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \left(\frac{1}{8}\right)\right) = \frac{\tan \left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan \arctan \left(\frac{1}{8}\right)}{1 + \tan \left(\frac{\pi}{4}\right) \times \tan \arctan \left(\frac{1}{8}\right)}$$

$$\tan c = \frac{1 - \frac{1}{8}}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{7}{9} \quad \text{Donc : } \tan(a+b) = \tan c$$

$$2) 0 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \arctan 0 < \arctan \frac{1}{2} < \arctan 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \arctan 0 < \arctan \frac{1}{5} < \arctan 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{5} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } 0 < a+b < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Et on a : } 0 < \frac{1}{8} < 1 \Rightarrow 0 < \arctan \frac{1}{8} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{8} < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Donc } 0 < c < \frac{\pi}{4}$$

On a : $\tan(a+b) = \tan c$ et puisque \tan est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ vers \mathbb{R} . Donc : $a+b=c$

$$\text{Cad : } \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{8}$$

$$\text{Donc : } \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 46 : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$; si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 0$

2) Etudier la continuité de f sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et est ce f est continue sur \mathbb{R}

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{Solution : 1) } x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

$$\text{donc : } |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \quad \text{donc : } \left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

$$\text{donc : } -|x| \leq f(x) \leq |x|$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Donc : f est continue en $x_0 = 0$

2) on a la fonction : $f_1 : x \rightarrow \frac{1}{x}$ continue sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$ et les fonctions :

$f_2 : x \rightarrow \cos x$ et $f_3 : x \rightarrow x$ sont continués sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$

Donc : $f = f_3 \times (f_2 \circ f_1)$ est continue sur les intervalles $]0; +\infty[$ et $]-\infty; 0[$

Et puisque : f est continue en $x_0 = 0$

Alors f est continue sur \mathbb{R}

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } x \rightarrow \cos x \text{ est continue en } x_0 = 0$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos \frac{1}{x} = +\infty$$

Exercice 47: Considérons la fonction f définie par : $f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$; si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$

1) Etudier la continuité de f en $x_0 = 2$

2) Etudier la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

3) Etudier la continuité de f sur \mathbb{R}

Solution : 1) on va écrire f sur les intervalles

$$\text{Bien définies : } \begin{cases} f(x) = 1 + (x-1)^2; \text{ si } x \in [1; 2] \\ f(x) = 2 + (x-2)^2; \text{ si } x \in [2; 3] \end{cases}$$

$$\text{On a } f(2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 + (x-1)^2 = 2 = f(2)$$

donc f est continue à gauche de $x_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 + (x-2)^2 = 2 = f(2)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = 2$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0 = 2$ alors f est continue en $x_0 = 2$

2) Etudions la continuité de f en $x_1 = \sqrt{2}$

Puisque les fonctions : $g : x \rightarrow E(x)$ et $h : x \rightarrow x$ sont continues en $x_1 = \sqrt{2}$

$$\text{alors : } f = g + (h-g)^2 \text{ est continue en } x_1 = \sqrt{2}$$

3) Etudions la continuité de f sur \mathbb{R}

Puisque les fonctions : $g : x \rightarrow E(x)$ et $h : x \rightarrow x$ sont continues sur chaque intervalle dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

Alors la fonction : $f = g + (h-g)^2$ est continue sur chaque intervalle dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

3) Etudions la continuité de f sur \mathbb{Z}

Soit : $k \in \mathbb{Z}$ on a $f(k) = k$

$$\begin{cases} f(x) = k - 1 + (x-k+1)^2; \text{ si } x \in [k-1; k] \\ f(x) = k + (x-k)^2; \text{ si } x \in [k; k+1] \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^-} k - 1 + (x-k+1)^2 = k = f(k)$$

donc f est continue à gauche de $x_0 = k$

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k^+} k + (x-k)^2 = k = f(k)$$

donc f est continue à droite de $x_0 = k$

et puisque f est continue à droite et à gauche de $x_0 = k$ alors f est continue sur \mathbb{Z}

conclusion : f est continue sur \mathbb{R}

Exercice48 : soient f et g sont deux fonctions définies sur \mathbb{R} tels que f est bornée et g continue sur \mathbb{R} ; Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées sur \mathbb{R}

Solution :1) f est bornée sur \mathbb{R} donc il existent deux réels m et M tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$m \leq f(x) \leq M$$

Donc : $f(x) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $g(f(x)) \in g([m; M]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

et puisque g est continue sur \mathbb{R} alors g est continue sur $[m; M]$ donc il existent deux réels a et b tel que $g([m; M]) = [a; b]$

donc $g(f(x)) \in [a; b] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $a \leq g(f(x)) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $a \leq (g \circ f)(x) \leq b \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $g \circ f$ sont bornée sur \mathbb{R}

2) la fonction g est continue sur \mathbb{R} donc :

$g(\mathbb{R}) = I$ avec I un intervalle de \mathbb{R}

et puisque f est bornée sur \mathbb{R} Donc :

$f(y) \in [m; M] \quad \forall y \in I$

Donc : $f(g(x)) \in [m; M] \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $m \leq (f \circ g)(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f \circ g$ sont bornée sur \mathbb{R}

Exercice 49: Considérons la fonction f continue

Sur l'intervalle $[a; b]$ et x_1 et x_2 et x_3 des

nombre de l'intervalle $[a; b]$

Montrer que l'équation :

$3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins

une solution dans $[a; b]$

Solution :

On considére la fonction g définie sur $[a; b]$ par

$g(x) = 3f(x) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

la fonction g est continue sur l'intervalle $[a; b]$

soit $f(\alpha)$ le plus petit des nombres $f(x_1); f(x_2)$

; $f(x_3)$ et soit $f(\beta)$ le plus grand des nombres

$f(x_1); f(x_2)$ et $f(x_3)$

On a : $g(\alpha) = 3f(\alpha) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$
 $g(\alpha) = (f(\alpha) - f(x_1)) + (f(\alpha) - f(x_2)) + (f(\alpha) - f(x_3))$
 Donc : $g(\alpha) \leq 0$

De même : on a : $g(\beta) = 3f(\beta) - (f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))$

$g(\beta) = (f(\beta) - f(x_1)) + (f(\beta) - f(x_2)) + (f(\beta) - f(x_3))$

Donc : $g(\beta) \geq 0$

et puisque g est continue sur $[a; b]$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe un réel c dans $[a; b]$ tel que : $g(c) = 0$

Cad $3f(c) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$

Donc l'équation $3f(x) = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$ admet au moins une solution dans $[a; b]$

Exercice50 : soient f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ tels que :

$0 < g(x) < f(x) \quad \forall x \in [a; b]$

Montrer que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

Solution : Montrons que :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$ Cad :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; \lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} - 1$

On considéré la fonction h définie sur $[a; b]$ par

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - 1$ la fonction h est continue sur

l'intervalle $[a; b]$ car f et g sont continues sur

l'intervalle $[a; b]$ et $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a; b]$ Donc la

fonction h admet un minimum λ Cad il existe

$x_0 \in [a; b]$ tel que :

$\lambda = h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$ et $\lambda \leq h(x) \quad \forall x \in [a; b]$

On a : $0 < g(x_0) < f(x_0)$ donc $0 < \frac{f(x_0)}{g(x_0)} - 1$

donc : $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ donc :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* / \forall x \in [a; b]; (1 + \lambda)g(x) \leq f(x)$

Exercice 51: Considérons la fonction f continue

Sur l'intervalle $[a;b]$ tel que : $f(a) < 0$

il existe $x_0 \in]a;b[$ tel que : $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$

Solution :

On a : $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0} \Leftrightarrow (b-x_0)f(x_0) - (a-x_0) = 0$

On considére la fonction g définie par :

$g(x) = (b-x)f(x) - (a-x)$; la fonction g est

continue sur l'intervalle $[a;b]$ car c'est la somme

de fonctions continues sur $[a;b]$

On a : $g(a) = (b-a)f(a) < 0$ car $f(a) < 0$

Et $b-a > 0$ et on a : $g(b) = b-a > 0$

Donc : d'après le (T.V.I) il existe $x_0 \in]a;b[$ tel

que : $g(x_0) = 0$ cad $f(x_0) = \frac{a-x_0}{b-x_0}$

Exercice 52 : Soit la fonction $f(x) = x^2 + x + 1$

définie sur \mathbb{R} .

1- Déterminer $J = f([0,1])$

2- Montrer que f admet une fonction réciproque de J vers $[0,1]$ et déterminer $f^{-1}(x) \forall x \in J$

Exercice 53 : Soit la fonction $g(x) = x - 2\sqrt{x}$

définie sur \mathbb{R}^+ .

1- Montrer que g est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ puis déterminer $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que g admet une fonction réciproque de J vers $[1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(x) \forall x \in J$

Exercice 54 : Soit la fonction $h(x) = \frac{x}{1-x^2}$

Montrer que h est une bijection de $-1,1[$ vers un intervalle J qu'il faut déterminer et déterminer et déterminer $h^{-1}(x) \forall x \in J$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

