

Limite finie L en a finie :

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. la fonction f tend vers l quand x tend vers a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ssi :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

2) Si P est une fonction polynôme alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

3) Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Limite à droite et limite à gauche

1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, a + r[$ où $r > 0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à droite si la proposition suivante est vraie : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Et on écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a - r, a[$ où $r > 0$ et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a à gauche si la proposition suivante est vraie : $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

Et on écrit : $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

3) Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l .

Autre limites infinies

1) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ssi :

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

3) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

4) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$:

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ ssi $(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ssi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ssi

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ssi

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ ssi}$$

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ ssi}$$

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$$

$$10) \text{ Si } \forall x \in I : |f(x) - l| \leq u(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ (On peut citer les mêmes propriétés à gauche et à droites de } a \text{ ou } +\infty \text{ ou } -\infty \text{.)}$$

$$11) \text{ Si } \forall x \in I : |f(x)| \leq u(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$12) \text{ Si } f \text{ admet une limite en } a \text{ et } f \text{ positif sur un intervalle pointé de centre } a \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$$

$$13) \text{ Si } f \text{ admet une limite en } a \text{ et } g \text{ admet une limite en } a \text{ et } f \leq g \text{ sur un intervalle pointé de centre } a \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$14) \text{ si on a : } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ et si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$15) \text{ si on a : } u(x) \leq v(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$$

$$16) \text{ Si on a : } u(x) \leq v(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$$

Les propriétés précédentes restent vraies si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Limites usuels :

1) Les fonctions : $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$;

$x \mapsto k|x|^n$ Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

2) l'inverse des fonctions $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$;

$x \mapsto k|x|^n$ où k un réel strictement positif et $n \in \mathbb{N}^*$, tendent vers $+\infty$ quand x tend vers 0.

3) les fonctions $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$

où k un réel donné et $n \in \mathbb{N}^*$

Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4) Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$); $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Opérations sur les limites

• Limite d'une somme

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

• Limite de l'inverse d'une fonction

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

• Limite d'un produit

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.

signe \pm donné par la règle des signes

• Limite d'un quotient

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	0	l'	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x))$	l/l'	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I.	F.I.

signe \pm donné par la règle des signes

F.I. signifie forme indéterminée ; il y en a quatre types :

$+\infty - \infty$	$\pm\infty \times 0$	$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\frac{0}{0}$
--------------------	----------------------	-------------------------------	---------------

Quelques techniques usuelles pour lever l'indéterminations :

Mise en facteur du terme prépondérant ou Utilisation d'une quantité conjuguée ou utilisation d'un taux d'accroissement...

Remarques : 1) La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite du rapport des termes de plus grand degré

LIMITES DES FONCTIONS USUELLES : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a : 1) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ 2) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ 3) si $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

Etude d'asymptotes et de branches infinies.

L'étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de la courbe de la fonction
La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction :

- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = a$
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ alors la courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ on va étudier les branches infinies

