

الصفحة	2	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2022 - الموضوع - مادة: الرياضيات- مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية
5			

EXERCICE1 : (10 points)

0.25 A-1- Vérifier que : $(x \in]-1; +\infty[) ; 0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que : $(x \in]-1; +\infty[) ; 0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que : $(x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

$$\text{où } g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

0.5 b) Montrer que : $(x \in I) ; 0 \leq g(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que : $(x \in I) ; 0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

0.5 b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

0.5 C-1- Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = a$

2- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [0,1]$

0.5 b) Montrer que : $(n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - a| \leq \frac{1}{3} |u_n - a|$

الصفحة	3	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2022 - الموضوع - مادة: الرياضيات- مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية
5			
0.5	c)	Montrer par récurrence que : $(n \in \mathbb{N}) ; u_n - a \leq \frac{1}{3^n}$	
0.25	d)	En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a	
	D-	Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$	
0.5	1-	Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$	
0.5	2-a)	En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :	
		$(x \in]0, +\infty[) ; F(x) = 2\ln 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \ln(1+x)$	
0.5	b)	Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$	
0.5	c)	Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$	
	E-	On pose : pour tout k de \mathbb{N} , $D_k = \int_k^{k+1} f(t)dt$	
		et pour tout n de \mathbb{N}^* , $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} D_k$	
0.25	1-a)	Vérifier que : $(k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq D_k \leq f(k) - f(k+1)$	
0.5	b)	En déduire que : $(n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$	
0.25	2-a)	Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.	
0.25	b)	En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.	
0.25	c)	Montrer que la limite 1 de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$	
EXERCICE2 : (3.5 points)			
Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$			
I- On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z			
$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$			
0.5	1-	Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$	
0.25	2-a)	Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $D = mn(1-j)^2$	
0.5	b)	Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)	

الصفحة	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2022 - الموضوع	
4	NS 24F	- مادة: الرياضيات- مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية
5		

0.5	3- Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$ Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.
0.25	II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) . Soit j la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$
0.75	1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application j 2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a'), B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application j et soient $P(p), Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments BA', CB' et AC'
0.25	a) Montrer que : $a' = -mj^2, b' = -m$ et $c' = -mj$
0.5	b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$
0.5	c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 : (3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation $(E_n) : (x + 1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans \mathbb{Z}^2 et soit p le plus petit diviseur premier de n

0.25	1-a) Montrer que : $(x + 1)^n \equiv x^n \pmod{p}$
0.25	b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x + 1)$
0.25	c) En déduire que : $(x + 1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$
0.5	2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}^2
0.5	3- On suppose que n est impair.
0.25	a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de \mathbb{Z}^2 tel que : $nu + (p - 1)v = 1$ (On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)
0.25	b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p - 1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p - 1)(v + nq)$
0.5	c) On pose : $v' = -(v + nq)$. Montrer que : $v' \equiv 0 \pmod{p}$

الصفحة	5	NS 24F	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2022 - الموضوع - مادة: الرياضيات- مسلك العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية
--------	---	--------	--

0.5

d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{Z}^2

EXERCICE 4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{Z}), +, ')$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{Z}, +, ')$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a, b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

0.25

1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{Z}), +)$

0.25

b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de \mathbb{Z} , on a :

$$M(a, b)' M(c, d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5

c) Montrer que $(E, +, ')$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit j l'application définie de E vers \mathbb{Z} par :

$$j(M(a, b)) = a^2 - 3b^2$$

0.5

Montrer que j est un homomorphisme de $(E, ')$ vers $(\mathbb{Z}, ')$

3- Soit $M(a, b) \in E$

0.25

a) Montrer que $M(a, b)' M(a, -b) = (a^2 - 3b^2).I$

0.5

b) Montrer que si $M(a, b)$ est inversible dans $(E, ')$ alors $j(M(a, b)) = 1$

0.5

c) On suppose que $j(M(a, b)) = 1$.

Montrer que $M(a, b)$ est inversible dans $(E, ')$ et préciser son inverse.

0.25

4-a) Montrer que : $j(M(a, b)) = 0 \iff a = b = 0$

0.25

b) En déduire que l'anneau $(E, +, ')$ est intègre.

0.25

c) Est-ce que $(E, +, ')$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN