

الصفحة

1
5

**|

**الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية
الدورة العادية 2022
- الموضوع -**

SSSSSSSSSSSSSSSSSS-ss

NS 24F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوصفي للتقدير والامتحانات

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	מסלול العلوم الرياضية - أ و ب - خيار فرنسية	المحضية أو المسالك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
 - L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.
-
- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse(10 pts)
 - L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
 - L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique(3 pts)
 - L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 : (10 points)

0.25 A-1- Vérifier que : $(x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2- En déduire que : $(x \in \mathbb{R}^+)$; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B- On considère la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0, +\infty[; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; i, j)$

0.5 1-a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 2-a) Montrer que : $(x \in]0, +\infty[)$; $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

$$\text{où } g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$$

0.5 b) Montrer que : $(x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que : $(x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3-a) Dresser le tableau de variation de f

b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O; i, j)$

(On prendra $\|i\| = 2\text{cm}$ et $\|j\| = 2\text{cm}$)

0.5 C-1- Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0; 1[$ tel que $f(a) = a$

2- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(n \in \mathbb{N})$; $u_n \in [0; 1]$

0.5 b) Montrer que : $(n \in \mathbb{N})$; $|u_{n+1} - a| \leq \frac{|u_n - a|}{3}$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - a| \leq \frac{\alpha}{3^n}$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a

D- Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5 1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in [0, +\infty]) ; F(x) = 2 \ln 2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

0.5 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$. puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2 \ln 2 - 1$

0.5 c) Calculer en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

E- On pose : pour tout k de \mathbb{N} , $D_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

$$\text{et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N}) ; 0 \leq D_k \leq f(k) - f(k+1)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0.25 2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est monotone.

0.25 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

0.25 c) Montrer que la limite 1 de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2 \ln 2 \leq 1 \leq \frac{1}{2}$

EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit m un nombre complexe non nul donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$(E_m) : z^2 + mj^2z + m^2j = 0$$

0.5 1- Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0.25 2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $D = 4m(1-j)^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5

3- Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, u, v) .

Soit j la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M(jz)$ tel que : $jz = (1 + j)z$

0.25

1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application j

2- On considère les points A , B et C d'affixes respectives m , mj et mj^2 et on note $A(jz)$, $B(jz)$ et $C(jz)$ les images respectives des points A , B et C par l'application j et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $\overline{BA(jz)}$, $\overline{CB(jz)}$ et $\overline{AC(jz)}$

0.75

a) Montrer que : $a = -mj^2$, $b = -m$ et $c = -mj$

0.25

b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0.5

c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 : (3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans \mathbb{Y}^2 l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x, y) une solution de l'équation (E_n) dans \mathbb{Y}^2 et soit p le plus petit diviseur premier de n

0.25

1-a) Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n \pmod{p}$

0.25

b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25

c) En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \pmod{p}$

0.5

2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{Q}^2

3- On suppose que n est impair.

0.5

a) Montrer qu'il existe un couple (u, v) de \mathbb{Q}^2 tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25

b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

0.5

c) On pose : $v' = - (v + nq)$. Montrer que : $v'^3 \equiv 0$

0.5

d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans \mathbb{C}^2

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2 \right\}$

0.25 1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{C}), +)$

0.25 b) Vérifier que pour tout a, b, c et d de \mathbb{C} , on a :

$$M(a,b) \cdot M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5 c) Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit j l'application définie de E vers \mathbb{C} par :

$$j(M(a,b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0.5 Montrer que j est un homomorphisme de (E, \cdot) vers (\mathbb{C}, \cdot)

3- Soit $M(a,b) \in E$

0.25 a) Montrer que $M(a,b) \cdot M(a, -b) = (a^2 - 3b^2)I$

0.5 b) Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans (E, \cdot) alors $j(M(a,b)) = 1$

0.5 c) On suppose que $j(M(a,b)) = 1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans (E, \cdot) et préciser son inverse.

0.25 4-a) Montrer que : $j(M(a,b)) = 0 \iff a = b = 0$

0.25 b) En déduire que l'anneau $(E, +, \cdot)$ est intègre.

0.25 c) Est-ce que $(E, +, \cdot)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN