

Correction proposée :
examen national R.S.M - 2019

Ex 1. (structure algébrique).

on définit sur $\mathbb{C}$ la loi de composition interne $*$ par: $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.

$$(x+iy) * (a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$$

1- a) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$
 $z' = a+ib, a, b \in \mathbb{R}$

ona:

$$\begin{aligned} z * z' &= xa + i(x^2b + a^2y) \\ &= a(x+iy) + i(ya^2 + bx^2) \\ &= z' * z \end{aligned}$$

g/c: la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$

1- b) Soit $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ tq: $z = x+iy$
 $z' = a+ib$
 $z'' = m+in$

tq: $x, y, a, b, m, n \in \mathbb{R}$.

il suffit de calculer $z * z'$ et $z' * z''$

on vérifie que:

$$(z * z') * z'' = z * (z' * z'')$$

g/c: la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$

1- c):

comme $*$ est commutative.

il suffit de résoudre l'équation $z * e = z$ d'inconnue $e = a+ib$

et $\forall z \in \mathbb{C}$.

Soit: $z * \mathbb{C}^* \text{ tq: } z = x+iy$

$$z * e = z \Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x+iy$$

$$\Leftrightarrow xa = x, x^2b + a^2y = y$$

$$\Leftrightarrow a = 1, x^2b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 0$$

$$\Leftrightarrow e = 1$$

pour $z = 0$ ona: $0 * 1 = 0$

d'où: $*$ admet $e = 1$ comme l'élément neutre.

1- d) Soit: $z = x+iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $z' = a+ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$z * z' = e = 1$$

$$\Leftrightarrow xa = 1 \text{ et } x^2b + a^2y = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{x} \text{ et } b = -\frac{y}{x^2}$$

comme $*$ est commutative

alors: la symétrisée de z est z'

$$\text{avec: } z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^2}$$

2- $E = \{x+iy / x > 0, y \in \mathbb{R}\}$

Soit $z, z' \in E, z = x+iy, x > 0$
 $z' = a+ib, a > 0$

ona:

$$z * z' = xa + i(x^2b + a^2y) \in E$$

$$\text{car: } x, a > 0 \Rightarrow x.a > 0$$

g/c: E est stable par $*$

2- b)

ona: $*$ est associative

• toute élément de E est

symétrisable de sq $z' = \frac{1}{x} - i\frac{y}{x^2}$

$$(\text{car: } x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0)$$

• $*$ est commutative

alors: $(E, *)$ est un groupe abélien

3- $G = \{1+iy / y \in \mathbb{R}\}$

$$\text{ona: } G \subset E \quad \text{car: } 1 > 0$$

Soit: $z, z' \in G$ tq: $z = 1+iy$
 $z' = 1+ib$

$$\text{ona } z * \text{sgm}(z') = z * (1-ib)$$

$$= 1 + i(-b+y) \in G$$

d'où: G est un sous grp de $(E, *)$

24. $F = \{ M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, x > 0, y \in \mathbb{R} \}$

alors: $\varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$ (i)

Soit: $M(x, y), M(a, b) \in F$ car:

$$M(x, y) \times M(a, b) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F$$

car: $xa > 0$ et $xb + ya \in \mathbb{R}$

de même, $M(a, b) \times M(x, y) = \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix}$

car: F est stable par $\times$ dans $M_2(\mathbb{R})$

b: $\varphi: E \rightarrow F$
 $x + iy \rightarrow M(x, y)$

Soit: $z = x + iy, z' = a + ib \in E$

alors: $\varphi(z * z') = M((xa)^2, x^2b + a^2y)$

et on a:

$$\begin{aligned} \varphi(z) \times \varphi(z') &= M(x^2, y) \times M(a^2, b) \in F \\ &= \begin{pmatrix} (xa)^2 & x^2b + a^2y \\ 0 & (xa)^2 \end{pmatrix} \text{ (question a)} \\ &= M((xa)^2, x^2b + a^2y) \end{aligned}$$

Soit: $M(a, b) \in F, a > 0, b \in \mathbb{R}$
 $z \in E$

$$\varphi(z) = M(a, b) \Leftrightarrow M(x^2, y) = M(a, b) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$(a > 0) \Leftrightarrow x = \sqrt{a}, y = b$$

alors:

φ est bi de $E \rightarrow F$ (ii)

(i), (ii) $\Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme de $(E, *)$ vers $(F, \times)$

c: comme.

$(E, *)$ est un grp commutatif.

$\varphi: (E, *) \rightarrow (F, \times)$ est un iso.

alors: $(F, \times)$ est un groupe commutatif

Fin structure.

Exercice II: les nombres complexes.

Soit $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:

$$(E): z^2 - (1+i)(m+1)z + 2im = 0$$

$$1 - \Delta = (1+i)^2(m+1)^2 - 4im$$

$$\begin{aligned} (1+i)^2 &= 2i \\ &= (1+i)^2[(m+1)^2 - 2m] \\ &= (1+i)^2(m-1)^2 \end{aligned}$$

si $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 1$ or $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
 Absurde.

alors: $\Delta \neq 0, \forall m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

1-b comme: $\Delta = (m-1)^2(1+i)^2$

$$z_1 = \frac{(m+1)(1+i) + (m-1)(1+i)}{2} = m \times (1+i)$$

$$z_2 = \frac{(m+1)(1+i) - (m-1)(1+i)}{2} = 1+i$$

alors: les solutions de (E) sont:

$$z_1 = (1+i) \cdot m, z_2 = 1+i$$

2

2. ~~Soit~~ $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$
 R-α: comme z_1, z_2 sont le sol.
 de (E)

$$\text{d'où: (E)} \Leftrightarrow (z - z_1)/(z - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$$

$$\text{alors: } \begin{cases} z_1 + z_2 = (1+i)(1+m) \\ z_1 z_2 = -2im \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{or: } 1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}) = 2 \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

(d'après la Formule d'Euler).

$$\text{Alors: } \begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + e^{i\frac{\pi}{2}})(1 + e^{i\theta}) \\ &= 4 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$\text{comme: } 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

$$\text{d'où: } z_1 + z_2 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}}$$

conclusion:

$$\begin{cases} |z_1 + z_2| = 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \\ \arg(z_1 + z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

R-b:

$$z_1 z_2 = -2im. \text{ (d'après *)}$$

$$\text{si } z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2im \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m \in i\mathbb{R}$$

$$\text{d'où: } \exists x \in \mathbb{R} \text{ tq: } m = ix$$

$$m = e^{i\theta} \Rightarrow |m| = 1 = |x| \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\text{or: } \theta \in]0, \pi[\text{ d'où: } x > 0$$

$$\text{conclusion: } z_1 z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow m = i$$

$$\text{d'où: } z_1 + z_2 = (1+i)^2 = 2i$$

II:

$$\text{or: } \omega \text{ est le milieu de } [CD]$$

$$\text{d'où: } \omega = \frac{c+d}{2}$$

$$\text{or: } D(d) \text{ est l'image de } B(b) \text{ par rotation de centre } O(0)$$

et d'angle $\theta = \pi/2$

$$\text{d'où: } d - z_0 = e^{i\theta} (b - z_0)$$

$$\Leftrightarrow d = ib = i(1+i)m$$

$$\Leftrightarrow d = (i-1)m$$

$$\text{d'où: } \omega = \frac{c+d}{2} = \frac{(1-i) + (i-1)m}{2}$$

$$\text{or: } \omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2}$$

$$\text{R-b: } \frac{b-a}{\omega} = \frac{(1+i)m - (1+i) \times 2}{(1-i)(1-m)} \times 2$$

$$= \frac{(1+i)(m-1)}{(1-i)(1-m)} \times 2 \quad \begin{cases} m \neq 1 \text{ car } \\ m \in i\mathbb{R} \end{cases}$$

$$= \frac{1+i}{i-1} \times 2$$

$$= \frac{(1+i)(1+i)}{-2} \times 2 = -(1+i)^2$$

$$\frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i, \quad z_0 = 0$$

$$\frac{1-c}{1-c} \cdot \frac{b-a}{\omega - z_0} = -2i \Rightarrow \begin{cases} \arg(AB) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \\ AB = 2 \cdot OR \end{cases}$$

$$\text{alors: } (OR) \perp (AB) \text{ et } AB = 2 \cdot OR$$

II-2: $(\odot \mathcal{L}) \cap (AB) = \{H(\mathcal{L})\}$.

R-9: $\mathcal{L} \perp AB$: $H \in (AB)$ d'au: $\mathcal{L} \perp AB$

les pts A, B, H sont des pts directs.
(Alignés). d'au: $\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \pi \pmod{\pi}$

$\arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) \equiv \pi \pmod{\pi}$

d'au: $\frac{b-a}{b-a} \in \mathbb{R} \quad (e^{i\pi} = -1)$

au: $(\odot \mathcal{H}) \perp (AB)$

d'au: $\arg\left(\frac{z_H - z_0}{z_B - z_0}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

alors: $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \quad (e^{i\frac{\pi}{2}} = i)$

$\frac{h-a}{b-a} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \frac{h-a}{b-a} = x$
 $\frac{h}{b-a} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}: \frac{h}{b-a} = iy$

$\frac{h-a}{b-a} = x \Leftrightarrow \frac{h}{b-a} = x + \frac{a}{b-a}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{m-1} \\ -iy = x + \frac{1}{\bar{m}-1} \end{cases}$

d'au:

$\begin{cases} iy = x + \frac{1}{m-1} \\ -iy = x + \frac{1}{\bar{m}-1} \end{cases}$

$\Rightarrow 2iy = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{\bar{m}-1}$

$iy = \frac{1}{2} \frac{\bar{m} - m}{(m-1)(\bar{m}-1)}$

d'au: $h = (b-a) \cdot iy$

$h = \frac{(1+i)}{2} \cdot \frac{\bar{m} - m}{\bar{m} - 1}$

Rq: $m, \bar{m}$ sont $\neq 1$ car $m \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Conclusion

$h = \frac{1+i}{2} \cdot \frac{\bar{m} - m}{\bar{m} - 1}$

Fin complexe.

Exercice III: Arith.

on admet que: 2969 est premier

[1]: on suppose que: 2969 $\nmid n$.

comme: 2969 est premier.

$2969 \nmid n$.

alors: $2969 \nmid n = 1$

d'après: le Théorème de Bézout.

$\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2: 2969u + n \cdot v = 1$

$\Leftrightarrow nu \equiv 1 \pmod{2969}$

1-b: au: $n^8 + m^8 \equiv 0 \pmod{2969}$

d'au: $(u \cdot m)^8 \equiv -(n \cdot u)^8 \pmod{2969}$

car: $(n \cdot u)^8 \equiv 1 \pmod{2969}$

d'au: $(u \cdot m)^8 \equiv -1 \pmod{2969}$

alors: $(u \cdot m)^{8 \times 371} \equiv (-1)^{371} \pmod{2969}$

q/c: $(u \cdot m)^{2968} \equiv -1 \pmod{2969}$

car: $2968 = 8 \times 371$ (4)

1-c:

$$\text{on a : } (u.m)^{2968} \equiv -1 [2969]$$

$$\text{d'où : } \exists k \in \mathbb{Z} : (u.m)^{2968} = -1 + 2969k$$

$$\Leftrightarrow \exists u', v' \in \mathbb{Z} : (u.m)u' + 2969.v' = 1$$

$$(u' = -(u.m)^{2967} \text{ et } v' = k.)$$

d'après : le Théorème de Bezout

$$\text{on a : } 2969 \wedge u.m = 1$$

$$\text{d'où : } 2969 \nmid u.m.$$

$$\boxed{1-d} : \begin{cases} 2969 \wedge u.m = 1 \\ 2969 \text{ premier} \end{cases}$$

d'après : le Théorème de Fermat, on a

$$(u.m)^{2969-1} \equiv 1 [2969]$$

$$\text{d'où : } (u.m)^{2968} \equiv 1 [2969]$$

2-a: on a:

$$\begin{cases} (u.m)^{2968} \equiv -1 [2969] \quad (1-b) \\ (u.m)^{2968} \equiv 1 [2969] \quad (1-d) \end{cases}$$

Absurde.

d'où : l'hypothèse dans la question 1 est fautive.

$$\text{alors : } 2969 \mid n$$

2-b:

$$\begin{cases} n \equiv 0 [2969] \\ m \equiv 0 [2969] \end{cases}$$

$$\Rightarrow n^8 + m^8 \equiv [2969]$$

$$\Rightarrow \text{on a : } 2969 \mid n$$

$$\text{d'où : } n \equiv 0 [2969]$$

$$\text{d'où : } m \equiv 0 [2969]$$

$$\text{d'où : } n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$$

Comme dans l'égalité:
 $n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$
 m, n jouent des rôles.
 Symétriques

alors : si on suppose que
 $2969 \nmid m$.

on utilisant la même démarche de la question 1, on va trouver l'Absurde, ($1 = -1$)

$$\text{conclusion : } 2969 \mid m$$

d'où :

$$n^8 + m^8 \equiv 0 [2969]$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 0 [2969] \text{ et } m \equiv 0 [2969]$$

Proposé par :
 SAÏD IBRAHIM
 QAFD
 Signature

Partie Analyse :

Exercice 4 : (10pts) :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{Car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

2-a : la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fcts dérivables sur $\mathbb{R}$

Et on a : $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 4 \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) + 4x \left(-e^{-x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= 4 \left(e^{-x} - x e^{-x} + x - 1 \right)$$

$$f'(x) = 4(x-1)(1-e^{-x})$$

2-b : Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\text{ona: } f'(x) = 4(e^{-x} - 1)(1-x)$$

$$\text{Si } x < 0 : \text{ona: } e^{-x} > 1.$$

$$\text{d'où: } \forall x < 0, f'(x) > 0$$

$$\text{Si } x > 0 : \text{ona: } e^{-x} < 1.$$

$$x \rightarrow 1-x \text{ change le signe on a:}$$

$$\text{d'où: } \forall x \in [0, 1]: f'(x) \leq 0$$

$$\forall x \in [1, +\infty]: f'(x) \geq 0$$

conclusion:

f str croissante sur $]-\infty, 0]$.

et $[1, +\infty[$

f str décroissante sur $[0, 1]$

et on a: le Tableau de variation

	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

2-c

ona: f continue, strictement croissante sur $]3/2, 2]$

d'où: f est bijection de $]3/2, 2]$ vers.

$$f\left(]3/2, 2]\right) = \left[6x \left(e^{-3/2} + \frac{3}{4} - 1\right), 8(e^{-2})\right]$$

$$\text{comme: } e^{3/2} \approx 4,5 > 4$$

$$\text{d'où: } 6 \left(\frac{1}{e^{3/2}} + \frac{1}{4} \right) < 0$$

$$\text{alors: } 0 \in]f(3/2), f(2)[$$

d'où: 0 admet un seul antécédent on le note $\alpha \in]3/2, 2]$

$$\text{c/c: } \exists ! \alpha \in]3/2, 2]: f(\alpha) = 0$$

$$2-d) f(\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha \left(e^{-\alpha} + \frac{\alpha}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{car: } \alpha > \frac{3}{2}$$

(6)

B-a:
ma: f' continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ (produit de fact-)

$$\text{et } f'(0) = f'(1) = 0$$

alors: d'après le Théorème de ROLL

$$\boxed{\exists x_0 \in]0,1[: f''(x_0) = 0}$$

3-b: ~~ma:~~ Soit $x \neq x_0 \in [0,1]$

ma: f'' est continue, dérivable sur l'intervalle I d'extrémités x et x_0

d'après: T.A.F

$$\exists c \in I \text{ tq: } f'(c) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f''(c) - 0}{x - x_0}$$

$$\text{Or: } f^{(3)}(x) = (3-x)e^{-x} \text{ (calculé)}$$

$$\text{d'où: } f^{(3)}(c) = (3-c)e^{-c} > 0$$

car c dans l'intervalle I d'ext x et x_0 , $I \subset [0,1]$.

Conclusion:
 $\forall x \in [0,1], x \neq x_0, \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$

B-c:

$$\text{ma: } \begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ \frac{f''(x)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$$

d'où: f'' s'annule en $x = x_0$ avec changement de signe

alors: $I(x_0, f(x_0))$ est un pt d'inflexion de la courbe

4-a Les branches infinies

$$\text{ma: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 = +\infty \text{ car: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

alors: (C_f) admet une branche parabolique de direction (oy) au voisinage de $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{e^x}{e^x} \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

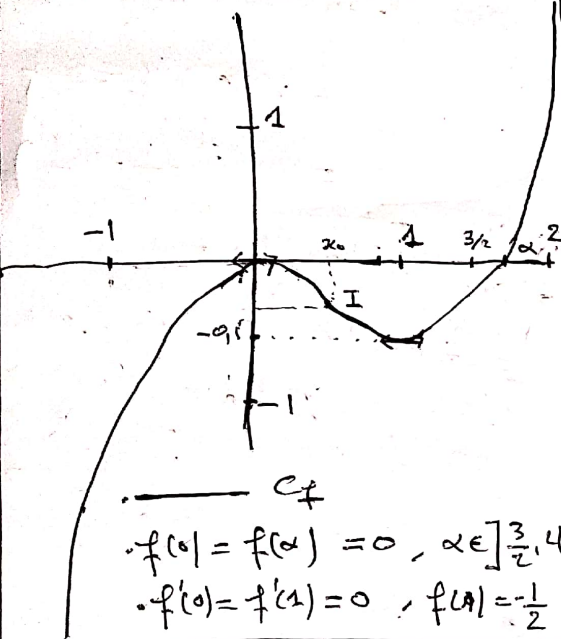
$$\text{car: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

d'où:

(C_f) admet 1 branche parabolique de direction (oy) au vois de $+\infty$

(4)

4-b: représentation graphique



$f(0) = f(2) = 0, \alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$
 $f'(0) = f'(1) = 0, f'(2) = -\frac{1}{2}$

5-a:

d'après le Tableau de variation on a

$\forall x \in]-\infty, 0]: f(x) \leq 0$

$\forall x \in [0, \alpha]: f(x) \leq 0$

d'où $\forall x \in]-\alpha, \alpha]: f(x) \leq 0$

5-b:

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha 4x \left(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^\alpha (4xe^{-x} + 2x^2 - 4x) dx$$

$$\int_0^\alpha 4xe^{-x} dx = [4xe^{-x}]_0^\alpha + \int_0^\alpha 4e^{-x} dx$$

$$= -4\alpha e^{-\alpha} + [4e^{-x}]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4\alpha e^{-\alpha} - 4e^{-\alpha}$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1)$$

d'où:

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1) + 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\alpha - 4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\alpha$$

$$= 4 - 4e^{-\alpha}(\alpha + 1) + \frac{2}{3}\alpha^3 - 2\alpha^2$$

on: $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} (2 - d)$

conclusion: (calcul)

$$I_x = \int_0^\alpha f(x) dx = \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3)$$

d'induction:

comme: $\forall n \in [0, \alpha]: f(x) \leq 0$

d'où: $\int_0^\alpha f(x) dx \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2 - 3) \leq 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 < 3$

$\Leftrightarrow |\alpha| < \sqrt{3}$

ch: $\alpha > 2$

d'où: $\alpha \in]2, \sqrt{3}]$

5-d

(aire) $= \int_0^\alpha |f(x)| dx$ u.a

$= - \int_0^\alpha f(x) dx \cdot u.a$

(aire) $= \frac{2}{3}\alpha(3 - \alpha^2) \cdot \text{cm}^2$

Partie II: cm. de f(x):

$u_{n+1} = f(u_n) + u_n, u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$

1-a: pour $n=0$, $u_0 < \alpha$.
Supposons que $u_n < \alpha$, Montrons que $u_{n+1} < \alpha$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$.

$u_n < \alpha \Rightarrow f(u_n) \leq 0$ (I-5-a) ^(H.R)

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow f(u_n) + u_n \leq \alpha$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \alpha$ CQFD

g.c: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$

1-b:

On a: $u_{n+1} - u_n = f(u_n)$

Or: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq \alpha$.

d'après: I-5-a: $f(u_n) \leq 0$

concluons: $u_{n+1} - u_n \leq 0$

g.c: (u_n) est décroissante

2-a: Supposons que $0 < u_0 < \alpha$.

$g(x) = e^{-x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fct dérivables

alors: $g'(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = \ln 2 > 0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g		$g(\ln 2)$	

On a: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) \geq g(\ln 2)$

Or $g(\ln 2) = e^{-\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} > 0$

Or $\ln 2 = 0,69 > 1/2$.

concluons: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 0$

2-b:

On a: $f(x) + x = 4x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1) + x$

$= x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{x}{2})$

$= 4x(e^{-x} + \frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{4})$

$f(x) + x = 4x g(x)$

Rq: dans l'énoncé il y'a 1 faute

$f(x) + x = x g(x)$ doit remplacer par: $f(x) + x = 4x g(x)$!

g.c: $f(x) + x = 4x g(x)$

On a: $u_0 \geq 0$.

pour $n=0$, $u_0 \geq 0$

Supposons que $u_n \geq 0$, Montrons $u_{n+1} \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4u_n g(u_n)$

Or: $\forall x \in \mathbb{R}: g(x) > 0$

alors: (H.R) $\Rightarrow u_{n+1} = 4u_n g(u_n) > 0$

concluons: $u_{n+1} > 0$

concluons: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$

2-c:

cha: $\forall n \in \mathbb{N}: u_n \geq 0$
 (u_n) décroissante

alors: (u_n) décroissante, minorée par 0

d'où: (u_n) est convergente

2-d

cha: $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$
 $= h(u_n)$

avec: $h(x) = f(x) + x, \forall x \in \mathbb{R}$

et cha: $0 \leq u_n \leq u_0 < \alpha, \forall n \in \mathbb{N}$
 $x \rightarrow h(x)$ est continue sur $[0, \alpha]$.

alors: $\lim u_{n+1} = \lim h(u_n)$
 $= \lim f(u_n) + u_n$

$$\Rightarrow l = f(l) + l$$

$$\Rightarrow f(l) = 0$$

on d'après l'étude et la représentation de f

cha: $l=0$ ou $l=\alpha$

ch: $u_n \leq u_0 < \alpha$

$$\Rightarrow \lim u_n = l \leq u_0 < \alpha$$

conclusion:

$$\lim u_n = 0$$

3: on suppose que: $u_0 < 0$

3-a: cha:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n)$$

comme: (u_n) est décroissante

alors: $u_n \leq u_0 < 0$
 et f croissante sur $]-\infty, 0]$

$$\text{d'où: } f(u_n) \leq f(u_0)$$

$$\forall n: u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

10/10

3-b

pour $n=0$: $u_0 \leq u_0$

Supp que: $u_n \leq u_0 + n f(u_0)$

$$\text{Montrons: } u_{n+1} \leq u_0 + (n+1) f(u_0)$$

Satisfaisant

$$\text{cha: } u_{n+1} \leq u_n + f(u_0) \quad (3-a)$$

$$\stackrel{(H.R)}{\leq} u_0 + n f(u_0) + f(u_0)$$

$$\leq u_0 + (n+1) f(u_0)$$

$$\text{d'où: } \forall n \in \mathbb{N}: u_n \leq u_0 + n f(u_0)$$

$$\text{3-c: } u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) = 0 \\ \Rightarrow f(u_0) < 0$$

$$\text{d'où: } \lim u_0 + n f(u_0) = -\infty$$

conclusion

$$\lim u_n = -\infty$$

Fin

SAID

IBN JAA

~~xygma~~