Corrigé de l'exercice 1 :

1-

- ✓ $E \neq \varnothing$ (car $O = M(0,0) \in E$)
- ✓ $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient $M(x,y)$ et $M(a,b)$ deux éléments de E :

On a :

$$\begin{aligned} M(x,y) - M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-a & -2(y-b) \\ y-b & (x-a)+2(y-b) \end{pmatrix} \\ &= M(x-a, y-b) \end{aligned}$$

$((x-a, y-b) \in \mathbb{R}^2)$

Donc : $\forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 \quad : \quad M(x,y) - M(a,b) \in E$

D'où E est un sous groupe de $(M_2(\mathbb{R}), +)$

2- a) Montrons que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$

- ✓ On a : $E \neq \varnothing$ et $E \subset M_2(\mathbb{R})$
- ✓ Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(M(x,y), M(a,b)) \in E^2$

On a :

$$\begin{aligned} \alpha.M(x,y) + \beta.M(a,b) &= \alpha.\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x & -2\alpha y \\ \alpha y & \alpha x + 2\alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a & -2\beta b \\ \beta b & \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2\alpha y - 2\beta b \\ \alpha y + \beta b & \alpha x + 2\alpha y + \beta a + 2\beta b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x + \beta a & -2(\alpha y + \beta b) \\ \alpha y + \beta b & (\alpha x + \beta a) + 2(\alpha y + \beta b) \end{pmatrix} \\ &= M(\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \end{aligned}$$

$((\alpha x + \beta a, \alpha y + \beta b) \in \mathbb{R}^2)$

Donc : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (M(x,y), M(a,b)) \in E^2 \ : \ \alpha.M(x,y) + \beta.M(a,b) \in E$

D'où E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.

b)

✓ Soit $M(x,y)\in E$, on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= x.I + y.J \end{aligned}$$

Donc (I,J) est une famille génératrice de l'espace vectoriel E

✓ Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$:

On a :

$$\begin{aligned} \alpha I+\beta J = O &\Rightarrow M(\alpha,\beta)=M(0,0) \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\beta = 0 \\ \alpha+2\beta = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \alpha = 0 \quad et \quad \beta = 0 \end{aligned}$$

Donc (I,J) est une famille libre de l'espace vectoriel E

✓ On conclut que (I,J) est une base de l'espace vectoriel E

3- a)

✓ $E\subset M_2(\mathbb{R})$

✓ Soit $\left(M(x,y),M(a,b)\right)\in E^2$, on a :

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa-2yb & -2xb-2ya-4yb \\ ya+xb+2yb & -2yb+xa+2bx+2ya+4yb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa-2yb & -2(xb+ya+2yb) \\ xb+ya+2yb & (xa-2yb)+2(xb+ya+2yb) \end{pmatrix} \\ &= M(xa-2yb, xb+ya+2yb) \end{aligned}$$

$\left((xa-2yb, xb+ya+2yb)\in\mathbb{R}^2\right)$

Donc : $\forall\left(M(x,y),M(a,b)\right)\in E^2 \; : \; M(x,y)\times M(a,b)\in E$

D'où E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b) Montrons que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

- ✓ $(E,+)$ est un groupe commutatif ($(E,+,.)$ est un espace vectoriel)
- ✓ "$\times$" est associative
- ✓ "$\times$" est distributive par rapport à "$+$"
- ✓ Soit $(M(x,y),M(a,b))\in E^2$:

$$\begin{aligned} M(x,y)\times M(a,b) &= M(xa-2yb,xb+ya+2yb) \\ &= M(ax-2by,bx+ay+2by) \\ &= M(a,b)\times M(x,y) \end{aligned}$$

Et par suite $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif .

4- a) Soit $(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2$, on a :

✓

$$\begin{aligned} \varphi(z\times z') &= \varphi((x+iy)\times(a+ib)) \\ &= \varphi((xa-yb)+i(xb+ya)) \\ &= M((xa-yb+xb+ya);-(xb+ya)) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \varphi(z)\times\varphi(z') &= \varphi(x+iy)\times\varphi(a+ib) \\ &= M(x+y,-y)\times M(a+b,-b) \\ &= M((x+y)(a+b)-2(-y)(-b),(x+y)(-b)-y(a+b)+2(-y)(-b)) \\ &= M(xa+xb+ya+yb-2yb;-xb-yb-ya-yb+2yb) \\ &= M(xa+xb+ya-yb;-(xb+ya)) \end{aligned}$$

Donc $\forall(z,z')\in(\mathbb{C}^*)^2 \quad : \quad \varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

b)

✓ Soit $M(x,y)\in E^*$

Existe-t-il z de $\mathbb{C}^*$, tel que $\varphi(z)=M(x,y)$

$$\begin{aligned}\varphi(z)=M(x,y) &\Leftrightarrow \varphi(a+ib)=M(x,y)\\ &\Leftrightarrow M(a+b,-\mathrm{b})=M(x,y)\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=x\\ -b=y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a=x-b\\ b=-y\end{cases}\\ &\Leftrightarrow a=x+y \quad et \quad b=-y\end{aligned}$$

Donc $\forall M(x,y)\in E^* \quad \exists(a,b)=(x+y,-y)\in(\mathbb{R}^*)^2 \quad : \quad \varphi(a+ib)=M(x,y)$

Donc φ est surjective

Et par suite $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$

c) On a φ est un homomorphisme surjective

Et puisque $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif alors $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)$ est aussi un groupe commutatif

Et comme $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$, on a donc $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .

5- On a :

- ✓ $(E,+)$ est un groupe commutatif .
- ✓ $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif .
- ✓ "$\times$" est distributive par rapport à "$+$"

Donc $(E,+,\times)$ est un groupe commutatif.

Corrigé de l'exercice 2 :

1- Soit p un nombre premier tel que : $p=3+4k \quad (k\in\mathbb{N}^*)$

On a : $p-5=4k-2=2(2k-1) \quad (k\in\mathbb{N}^*)$

Soit $x\in\mathbb{Z}$:

On a :

$$\begin{aligned}x^2\equiv 1[p] &\Rightarrow (x^2)^{2k-1}\equiv 1^{2k-1}[p]\\ &\Rightarrow x^{4k-2}\equiv 1[p]\\ &\Rightarrow x^{p-5}\equiv 1[p]\end{aligned}$$

Donc pour tout entier relatif x, si $x^2\equiv 1[p]$ alors $x^{p-5}\equiv 1[p]$

2- a) Soit x un entier relatif vérifiant : $x^{p-5}\equiv 1[p]$

Montrons que x et p sont premiers entre eux .

Puisque $x^{p-5} \equiv 1[p]$ alors il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{p-5} = 1 + up$

Donc $u \in \mathbb{Z}$ tel que $x^{p-6}.x - u.p = 1$ $\quad (p-6 \in \mathbb{N}^*)$

Donc d'après le théorème de Bézout $x \wedge p = 1$

D'où x et p sont premiers entre eux .

b) On a p un nombre premier et $x \wedge p = 1$

Donc d'après le théorème de Fermat : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

c)

$$\begin{aligned} 2+(k-1)(p-1) &= 2+(k-1)(4k+2) \\ &= 2+4k^2+2k-4k-2 \\ &= 4k^2-2k \\ &= k(4k-2) \\ &= k(p-5) \end{aligned}$$

d) On a $x^{p-5} \equiv 1[p]$

Donc $\left(x^{p-5}\right)^k \equiv 1^k[p]$

Donc $x^{k(p-5)} \equiv 1[p]$

Donc $x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc $x^2.x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]$

Donc $\boxed{x^2.\left(x^{p-1}\right)^{k-1} \equiv 1[p]}$

Et d'autre part on a $x^{p-1} \equiv 1[p]$

Donc $\left(x^{p-1}\right)^{k-1} \equiv 1[p]$

Donc $\boxed{x^2.\left(x^{p-1}\right)^{k-1} \equiv x^2[p]}$

On déduit que : $x^2 \equiv 1[p]$

3- Résolvons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^{62} \equiv 1[67]$

On a pour tout entier relatif x, $\quad x^2 \equiv 1[p] \Leftrightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]$

avec p un nombre premier tel que : $p = 3+4k \quad \left(k \in \mathbb{N}^*\right)$

on 67 est un nombre premier et : $67 = 3 + 4(16)$

On a :

$$\begin{aligned}
x^{62} \equiv 1[67] &\Leftrightarrow x^{67-5} \equiv 1[67] \\
&\Leftrightarrow x^2 \equiv 1[67] \\
&\Leftrightarrow x^2 - 1 \equiv 0[67] \\
&\Leftrightarrow (x-1)(x+1) \equiv 0[67] \\
&\Leftrightarrow x-1 \equiv 0[67] \quad ou \quad x+1 \equiv 0[67] \quad (car \quad p \quad est \quad premier) \\
&\Leftrightarrow x \equiv 1[67] \quad ou \quad x \equiv 1[67]
\end{aligned}$$

Donc $S = \{1 + 67k \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-1 + 67k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$

Corrigé de l'exercice 3 :

I- Soit $m \in \mathbb{C}$

On considère dans l'ensemble complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_m) d'inconnue z :

$$z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

1- a)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (im+2)^2 - 4(1)(im+2-m) \\
&= -m^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m \\
&= -m^2 + 4m - 4 \\
&= -(m-2)^2 \\
&= (i(m-2))^2 \\
&= (im-2i)^2
\end{aligned}$$

b)

- ✓ Si $m = 2$: alors l'équation (E_2) admet une solution unique

$$z = \frac{-(2i+2)}{2} = -1 - i$$

Donc $S = \{-1 - i\}$

- ✓ Si $m \in \mathbb{C} - \{2\}$: alors alors l'équation (E_m) admet deux solutions :

$$z=\frac{-(im+2)+(im-2i)}{2(1)} \quad ou \quad z=\frac{-(im+2)-(im-2i)}{2(1)}$$
$$z=\frac{-2-2i}{2} \quad ou \quad z=\frac{-2im-2+2i}{2}$$
$$z=-1-i \quad ou \quad z=-1-im+i$$

Donc $S=\{-1-i,-1-im+i\}$

2- Pour $m=i\sqrt{2}$

✓

$$\begin{aligned}
-1-i &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}.e^{i\frac{5\pi}{4}}=\sqrt{2}.e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}
-1-im+i &= -1-i\left(i\sqrt{2}\right)+i\\
&= -1+\sqrt{2}+i\\
&= \sqrt{2}+\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\\
&= \sqrt{2}\left(e^{i(0)}+e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}\right)\\
&= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}\left(e^{i\frac{-3\pi}{8}}+e^{i\frac{3\pi}{8}}\right)\\
&= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{8}}\times 2\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\\
&= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right).e^{i\frac{3\pi}{8}} \qquad \left(\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)>0\right)
\end{aligned}$$

II-

1- Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme M en M'

a) l'affixe z du centre de la rotation R est solution de l'équation $z=-iz-1+i$

$$z=-iz-1+i$$
$$(1+i)z=-1+i$$
$$z=\frac{-1+i}{1+i}=\frac{i(1+i)}{(1+i)}=i$$

Donc $z=\omega$

D'où Ω est le centre de R

b) Déterminons l'affixe b de B, où B est le point tel que : $A=R(B)$

$$a=-ib-1+i$$
$$ib=-1+i-a$$
$$b=\frac{-1+i-a}{i}$$
$$b=\frac{-1+i+1+i}{i}$$
$$b=\frac{2i}{i}$$
$$\boxed{b=2}$$

2- a) On a :

✓

$$\begin{aligned} m'-a &= -im-1+i+1+i \\ &= -im+2i \\ &= -i(m-2) \\ &= -i(m-b) \end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned} \frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b) &= \frac{i+1+i}{i-2}(m-b) \\ &= \frac{1+2i}{-2+i}(m-b) \\ &= \frac{-i(-2+i)}{-2+i}(m-b) \\ &= -i(m-b) \end{aligned}$$

Donc : $m'-a=\frac{\omega-a}{\omega-b}(m-b)$

b)

✓ Si $m=a$: le résultat demandé est évident

✓ Si $m\neq a$:

On a : $\frac{m'-a}{m-a}=\frac{\omega-a}{\omega-b}\times\frac{m-b}{m-a}$

$$\begin{aligned} A,M \quad et \quad M' \quad sont \quad alignés \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{m'-a}{m-a} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\omega-a}{\omega-b} \times \frac{m-b}{m-a} \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad A,B,\Omega \quad et \quad M \quad sont \quad cocycliques \end{aligned}$$

c) On a : $A,M \quad et \quad M' \quad sont \quad alignés \Leftrightarrow A,B,\Omega \quad et \quad M \quad sont \quad cocycliques$

Et par suite M appartient au cercle circonscrit au triangle $AB\Omega$ rectangle et isocèle en Ω

$(A = R(B))$

Donc M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

✓ De rayon : $r = \frac{AB}{2} = \frac{|b-a|}{2} = \frac{|3+i|}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

✓ Et de centre le point I d'affixe : $z_I = \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Corrigé de l'exercice 4 :

Partie I :

1- a) soit $x \in]0,+\infty[$:

on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t}{1+t}dt &= \int_0^x \frac{1+t-1}{1+t}dt \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt \\ &= \int_0^x \left(1 - \frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt \\ &= [t - \ln|1+t|]_0^x \\ &= x - \ln(1+x) \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad \int_0^x \frac{t}{1+t}dt = x - \ln(1+x)$

b) Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{pmatrix} u = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{u} \\ t.dt = \frac{1}{2}du \\ t = 0 \to u = 0 \\ t = x \to u = x^2 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \int_0^{x^2} \frac{du}{1+\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\int_0^x \frac{t}{1+t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}}du$

c) Soient $x \in]0,+\infty[$ et $u \in [0, x^2]$:

$$\begin{array}{ll} On \quad a & 0 \le u \le x^2 \\ Donc & 0 \le \sqrt{u} \le x \\ Donc & 1 \le 1+\sqrt{u} \le 1+x \\ Donc & \frac{1}{1+x} \le \frac{1}{1+\sqrt{u}} \le 1 \\ Donc & \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{1}{2\left(1+\sqrt{u}\right)} \le \frac{1}{2} \\ Donc & \int_0^{x^2} \frac{1}{2(1+x)}du \le \int_0^{x^2} \frac{1}{2\left(1+\sqrt{u}\right)}du \le \int_0^{x^2} \frac{1}{2}du \end{array}$$

Et par suite : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$

2- On a :

$$\begin{cases} (\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$: $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \quad ; \quad x \ne 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1- a) On a : $f(0)=1$

Et $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

Car $\begin{cases}\lim_{x\to0^+} 1+x=1\\ \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\end{cases}$

Puisque $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x}\ln(1+x)=f(0)$ alors f est continue à droite en 0

b) On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x+1}{x}\ln(1+x)-1}{x}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{x\ln(1+x)}{x^2}+\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\ &= 1-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc : f est dérivable à droite en 0 et on a $f_d'(0)=\frac{1}{2}$

c)

✓ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\ln(x+1)=+\infty$

Car : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1\\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty\end{cases}$

✓ $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1}{x}\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2}\ln(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2\times\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0$

Car : $\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^2=1\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=0\end{cases}$

✓ (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2- a) on a :

$f_1 : x \mapsto \frac{x+1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

$f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc $f = f_1 \times f_2$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Soit $x \in]0,+\infty[$:

On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(x+1)\right)' \\ &= \left(\frac{x+1}{x}\right)'\ln(x+1) + \frac{x+1}{x}(\ln(x+1))' \\ &= \frac{-1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{x+1} \\ &= -\frac{1}{x^2}\ln(x+1) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

b) on a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

comme $x^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $x - \ln(1+x)$

on a $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad \frac{x^2}{2(1+x)} \le x - \ln(1+x) \le \frac{1}{2}x^2$

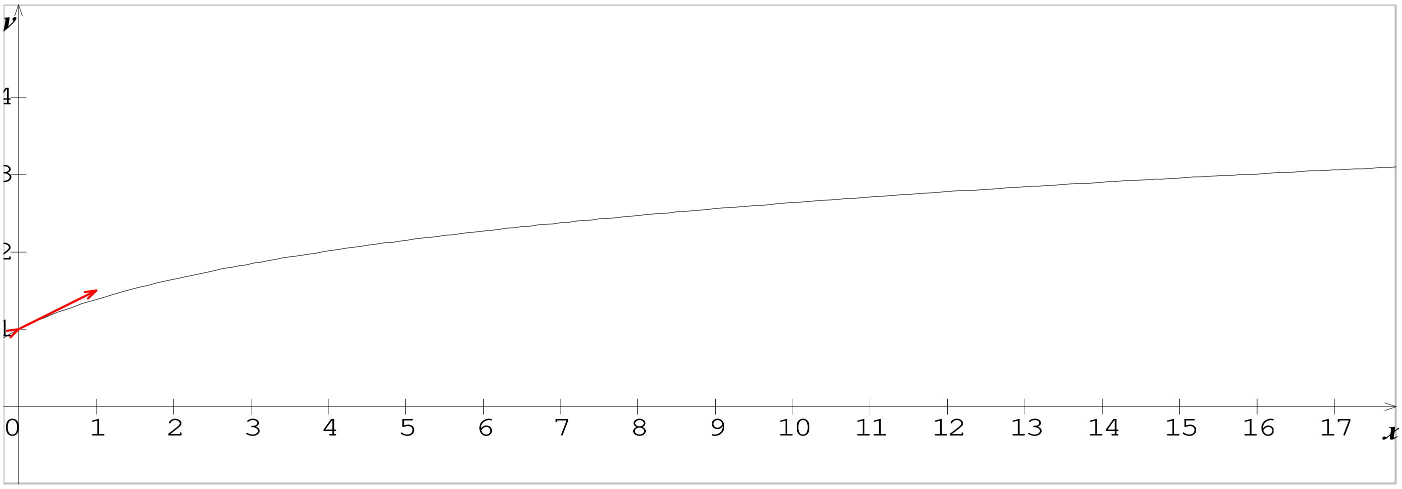
donc $f'(x) > 0$

et par suite f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

c) on a f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

donc $f([0,+\infty[) = \left[f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [1,+\infty[$

3-



Partie III :

1- a) on a $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $0 < \frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

et par suite $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

b)

✓ on a g est dérivable sur $]0,+\infty[$

soit $x \in]0,+\infty[$:

on a : $g'(x) = f'(x) - 1$

et comme $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ alors $f'(x) - 1 < 0$

donc $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $g'(x) < 0$

et par suite g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

✓ on a g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

donc $g(]0,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right[=]-\infty, 1[$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} f(x)-x\\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-1\right)\\ &= -\infty\\ car & \begin{pmatrix}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

c) On a :

- ✓ g est continue sur $]0,+\infty[$
- ✓ g est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$
- ✓ $0\in g(]0,+\infty[)$

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

Et par suite l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α sur $]0,+\infty[$

2- Soit a un réel de l'intervalle $]0,+\infty[$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=a$ et $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_{n+1}=f(u_n)$

a)

- ✓ Pour $n=0$:
  On a $u_0=a$ et $a>0$
  Donc $u_0>0$
- ✓ Soit $n\in\mathbb{N}$
  - Supposons que $u_n>0$
  - Montrons que $u_{n+1}>0$?

    On a d'après l'hypothèse de récurrence $u_n>0$

    Et comme f est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$

    Alors $f(u_n)>f(0)$

    Donc $u_{n+1}>1>0$
- ✓ On conclut que : $(\forall n\in\mathbb{N})$; $u_n>0$

b) Soit $n\in\mathbb{N}$

On a :

- ✓ f est continue sur l'intervalle fermé d'extrémités u_n et α
- ✓ f est dérivable sur l'intervalle ouvert d'extrémités u_n et α

✓ $(\forall x \in]0,+\infty[)\quad ;\quad 0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}$

Donc d'prés l'inégalité des accroissements finis : $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

Et par suite $(\forall n \in \mathbb{N})\quad ;\quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

$(\ f(u_n) = u_{n+1} \quad et \quad f(\alpha) = \alpha\ )$

c)

✓ Pour $n = 0$:

On a $|u_0 - \alpha| = |a - \alpha|$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha| = |a - \alpha|$

Donc $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a - \alpha|$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$

- Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$
- Et montrons que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|$?

On a d'après la question précédente $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|}\quad (*)$

Et on a d'après l'hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

Donc $\boxed{\frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}\quad (**)$

De $(**)$ et $(**)$, on obtient : $\boxed{|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a - \alpha|}$

✓ On conclut que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad ;\quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

d) On a $-1 < \frac{1}{2} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha| = 0$

Et comme $(\forall n \in \mathbb{N})\quad ;\quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$

Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

Corrigé de l'exercice 5 :

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

1-

- ✓ On a $t\mapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$

(composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$)

Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (primitive d'une fonction qui s'annule en 0)

Et par suite F est continue sur $\mathbb{R}$

- ✓ Soit $x\in\mathbb{R}$:

  On a $F'(x)=e^{x^2}$

  Puisque : $e^{x^2}>0$

  Alors : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad F'(x)>0$

  D'où F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2-

- ✓ On a : $t^2\geq 0$

  Donc : $e^{t^2}\geq 1$

  Donc : $\int_0^x e^{t^2}dt \geq \int_0^x 1dt$

  Donc : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad F(x)\geq x$

- ✓ On a :

  $$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ (\forall x\in\mathbb{R})\quad F(x)\geq x \end{cases}$$

  Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

3-

- Soit $x\in\mathbb{R}$, On a :
  - ✓ $-x\in\mathbb{R}$
  - ✓ $F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}dt$

$$\begin{pmatrix} u=-t \Leftrightarrow t=-u \\ dt=-du \\ t=0 \rightarrow u=0 \\ t=-x \rightarrow u=x \end{pmatrix}$$

$$F(-x)=\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt=-\int_0^{x} e^{(-u)^2}\,du=-\int_0^{x} e^{u^2}\,du=-\int_0^{x} e^{t^2}\,dt=-F(x)$$

Donc F est impaire .

- $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=\lim\limits_{u\to-\infty} F(-u)=\lim\limits_{u\to-\infty} -F(u)=-\infty$

4- Puisque F est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
alors F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$
tel que : $F(\mathbb{R})=F(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-\infty} F(x),\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

5- On a $F(0)=0$
Et $F'(0)=1$ donc $F'(0)\neq 0$

✓ On a F est dérivable en 0 et $F'(0)\neq 0$
Donc G est dérivable en 0
Et on a : $G'(0)=\left(F^{-1}\right)'(0)=\left(F^{-1}\right)'(F(0))=\dfrac{1}{F'(0)}=\dfrac{1}{1}=1$

つづく