★★

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⵓⵙⵏⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵙⵏⴰⵙ
ⴷ ⵓⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⵏⴰⵡ ⴷ ⵓⵔⵣⵣⵓ ⴰⵎⴰⵙⵙⴰⵏ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
المسالك الدولية - خيار فرنسية
الدورة الاستدراكية 2017
- الموضوع -

RS 24F

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) – خيار فرنسية	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques.......(4.5pts)
- L'exercice2 se rapporte au calcul des probabilités..........(3pts)
- L'exercice3 se rapporte aux nombres complexes ....(2.5pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse................................(10pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

<u>Exercice 1</u> : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et

$E=\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0.75 1-Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$, de dimension 2

0.5 2-a) Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.75 b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3- On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ vers E^* définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

0.75 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sur $(E^*,\times)$

0.5 b) En déduire que $(E^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 c) Montrer que : $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\,i\right)$,puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(E^*,\times)$

0.5 4- Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

<u>Exercice 2</u> : (3 pts)

Un sac contient 2n boules (n dans $\mathbb{N}^*$) , dont n sont blanches et n sont noires.
Toutes les boules sont indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points .
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points .
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul .

0.75 1- Calculer la probabilité de gagner 20 points , la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2- On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3- Au cours d'un seul jeu ,on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement les valeurs -20 si on perd , 0 si le gain est nul et +20 si on gagne.

0.5 a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.25 b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 3: (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z

et M' le point d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

0.5 1- Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.

2- On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1

0.5 Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

0.75 3- Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)

4- Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$

0.75 Montrer que : si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

EXERCICE4 :(10 pts)

Partie1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad \forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)=\frac{\arctan(x)}{x}$$

0.5 1- Montrer que f est continue sur l'intervalle I

0.5 2-a) Soit x dans I .Montrer que : $\forall t\in[0,x] \quad \frac{1}{1+x^2}\leq\frac{1}{1+t^2}\leq 1$

0.5 b) Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[\quad \frac{x}{1+x^2}\leq\arctan(x)\leq x$

0.75 c) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 3- a) Sachant que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.25 b) Etudier les variations de f sur l'intervalle I

Partie 2 :

Soit g la fonction numérique définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$g(0)=1 \quad \text{et} \quad \forall x\in]0,+\infty[\quad g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad f(x)\leq g(x)\leq 1$

0.75 b) Montrer que g est dérivable à droite en 0

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$$

0.25 3- Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I

0.75 4-a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0$

(remarquer que : $\forall x\in]0,+\infty[\quad 0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$)

0.5 b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Partie 3 :

0.75 1- Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,1[$

0.5 2- a) Vérifier que : $\forall x\in[0,+\infty[\quad 0\leq 1-f(x)\leq \frac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b)Partie1)

0.75 b) Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[\quad |g'(x)|\leq \frac{1}{2}$

3- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite numérique définie par :

$$u_0\in\mathbb{R}^+ \quad , \quad u_{n+1}=g(u_n) \text{ pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}$$

0.75 a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente.

FIN