



الأمتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2016  
- الموضوع -

RS 25

٢٠١٦ | ٢٠١٤ | ٢٠١٣ | ٢٠١٢ | ٢٠١١ | ٢٠١٠ | ٢٠٠٩ | ٢٠٠٨ | ٢٠٠٧ | ٢٠٠٦



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقدير  
وامتحانات والتوجيه

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte au calcul des probabilités .....(3 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte aux structures algébriques.. (3.5 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.....(6.5 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.....(3.5 pts)

**L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

### EXERCICE 1 : (3pts)

On a deux boites  $U$  et  $V$ . La boite  $U$  contient 4 boules rouges et 4 boules bleues.

La boite  $V$  contient deux boules rouges 4 boules bleues.

On considère l'épreuve suivante : On tire au hasard une boule de la boite  $U$  : Si elle est rouge, on la remet dans la boite  $V$  puis on tire au hasard une boule de la boite  $V$  ; si elle est bleue on la pose de coté puis on tire une boule de la boite  $V$ .

Soient les événements suivants :  $R_U$  « La boule tirée de la boite  $U$  est rouge »

$B_U$  « La boule tirée de la boite  $U$  est bleue »

$R_V$  « La boule tirée de la boite  $V$  est rouge »

$B_V$  « La boule tirée de la boite  $V$  est bleue »

0.5 1- Calculer la probabilité de chacun des deux événements  $R_U$  et  $B_U$ .

0.5 2- a) Calculer la probabilité de l'événement  $B_V$  sachant que l'événement  $R_U$  est réalisé.

0.5 b) Calculer la probabilité de l'événement  $B_V$  sachant que l'événement  $B_U$  est réalisé.

1 3- Montrer que la probabilité de l'événement  $B_V$  est :  $\frac{13}{21}$

0.5 4- En déduire la probabilité de l'événement  $R_V$ .

### EXERCICE 2 : (3.5 pts)

On rappelle que  $(M_3(\mathbb{C}), +, \cdot)$  est un anneau unitaire d'unité  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et que  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

est un corps commutatif.

Pour chaque nombre complexe  $z = x + iy$  où  $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ , on pose :

$M(z) = \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 5y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & x-2y \end{pmatrix}$  et on considère l'ensemble  $E = \{M(z) / z \in \mathbb{C}\}$

1- On munit  $E$  de la loi de composition interne  $*$  définie par :

$$("z \in E) ("z' \in E) : M(z)*M(z') = M(z) + M(z') - M(0)$$

1 Montrer que  $(E, *)$  est un groupe commutatif.

2- On considère l'application  $j : \mathbb{C}^* \rightarrow E$  qui associe au nombre complexe  $z$  de  $\mathbb{C}^*$  la matrice  $M(z)$  de  $E$

1 a) Montrer que  $j$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$  dans  $(E, *)$

0.5 b) En déduire que  $(E - \{M(0)\}, *)$  est un groupe commutatif.

- 1 3- Montrer que  $(E, *, ' )$  est un corps commutatif.

### EXERCICE 3 : (3.5 pts)

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{E}$  l'équation :  $(E): z^2 - (1 + \sqrt{3})(1 + i)z + 4i = 0$

- 0.5 1-a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E)$  est :  $D = (\sqrt{3} - 1)(1 - i)^2$

- 1 b) Ecrire sous forme trigonométrique les deux solutions de  $(E)$

2- Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les deux points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 1 + i\sqrt{3}$  et  $b = \sqrt{3} + i$

- 0.75 a) Montrer que l'ensemble  $(D)$  des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie  $z = \frac{1}{2}a\bar{z}$  est une droite qui passe par le point  $B$

b) Soient  $M$  et  $M'$  deux points d'affixes respectives  $z$  et  $z'$  tels que :  $z' = a\bar{z} - b$  et  $z^1 = b$

0.5 Montrer que : 
$$\frac{b^2}{(z' - b)(z - b)} = \frac{2}{|z - b|^2}$$

- 0.75 c) En déduire que la droite  $(D)$  est une bissectrice de l'angle  $(BM, BM')$

### EXERCICE 4 : (6.5 pts)

$n$  est un entier naturel non nul.

Soit  $f_n$  la fonction numérique définie sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  par :  $f_n(x) = \ln(x) - \frac{n}{x}$

et soit  $(C_n)$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 0.75 1-a) Etudier les deux branches infinies de la courbe  $(C_n)$ .

- 0.75 b) Etudier les variations de la fonction  $f_n$  sur  $[0, +\infty[$  puis donner son tableau de variation.

- 0.5 c) Construire  $(C_2)$

- 0.5 2- Montrer que la fonction  $f_n$  est une bijection de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$

- 0.5 3-a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, il existe un unique nombre réel  $\alpha_n$  de l'intervalle  $[0, +\infty[$  tel que :  $f_n(\alpha_n) = 0$

- 0.5 b) Comparer  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$

- 0.5 c) Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est strictement croissante.

- 0.5 4-a) Montrer que :  $(\forall x > 0) \quad \ln(x) < x$

0.5	b) Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$
	5- Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1 on pose : $I_n = \frac{1}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x) dx$
0.5	a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists c_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]) : I_n = f_n(c_n)$
0.5	b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq I_n \leq \frac{1}{\alpha_{n+1}}$
0.5	c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

### EXERCICE 5 : (3.5 pts)

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction numérique  $g_n$  à variable réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $[n, +\infty[$  par :

$$g_n(x) = \int_n^x \frac{1}{\ln t} dt$$

0.5	1-a) Montrer que la fonction $g_n$ est dérivable sur l'intervalle $[n, +\infty[$ puis déterminer sa fonction dérivée première $g'_n$
0.25	b) Montrer que la fonction $g_n$ est strictement croissante sur l'intervalle $[n, +\infty[$
0.5	2-a) Montrer que : $(\forall x \geq n) ; g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$ ( On pourra utiliser l'inégalité : $(\forall t \geq 0) ; \ln(1+t) \leq t$ )
0.25	b) En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = +\infty$
0.25	3-a) Montrer que $g_n$ est une bijection de l'intervalle $[n, +\infty[$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$ .
0.5	b) En déduire que : $(\forall n \geq 2) (\exists! u_n \geq n) : \int_n^{u_n} \frac{1}{\ln t} dt = 1$
	4- On considère la suite numérique $(u_n)_{n \geq 2}$ définie dans la question 3-b).
0.5	a) Montrer que : $(\forall n \geq 2) ; \int_{u_n}^{u_{n+1}} \frac{1}{\ln t} dt = \int_n^{n+1} \frac{1}{\ln t} dt$
0.5	b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante.
0.25	c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**FIN**