المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني

ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⴳⵎⵉ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⴳ ⴰⵙⵏⵎⴰⵍ

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2015
- الموضوع -

RS 25

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 5 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques……….(4 pts)
- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique et au calcul des probabilités…………………………………………...……..(3 pts)
- Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes……….(3pts)
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse………………….........(6 pts)
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse……………...……….(4 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1:(4 points)

Première partie: On munit $\mathbb{R}$ de la loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\right) \qquad x*y = x+y-e^{xy}+1$$

0.25 1-a) Montrer que la loi $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$

0.5 b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2- Sachant que l'équation : $3+x-e^{2x}=0$ admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes a et b .

Montrer que la loi $*$ n'est pas associative dans $\mathbb{R}$

Deuxième partie :On rappelle que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et que $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$ est un espace vectoriel réel et que $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ est un groupe commutatif.

Pour tout x et y réels, on pose : $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -2y\\ \frac{y}{2} & x\end{pmatrix}$ et soit $F=\left\{M(x,y)/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$

0.5 1- Montrer que F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $\left(M_2(\mathbb{R}),+,.\right)$

0.5 2- Montrer que F est stable dans $\left(M_2(\mathbb{R}),\times\right)$

3- On considère l'application φ de $\mathbb{C}^*$ dans F qui associe à tout nombre complexe $x+iy$ (où x et y sont deux réels) la matrice $M(x,y)$.

0.5 a) Montrer que φ est un homomorphisme de $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$ vers $\left(F,\times\right)$

0.25 b) On pose : $F^*=F-\left\{M(0,0)\right\}$. Montrer que $\varphi\left(\mathbb{C}^*\right)=F^*$

0.25 c) Montrer que $\left(F^*,\times\right)$ est un groupe commutatif.

0.75 4- Montrer que $\left(F,+,\times\right)$ est un corps commutatif.

EXERCICE2: (3 points)

0.5 I-1- a étant un entier, montrer que si a et 13 sont premiers entre eux alors $a^{2016}\equiv 1\ [13]$

2- On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E): $x^{2015}\equiv 2\ [13]$ et soit x une solution de l'équation (E).

0.5 a) Montrer que x et 13 sont premiers entre eux.

0.5 b) Montrer que : $x\equiv 7\ [13]$

0.5 3- Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\left\{7+13k\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

II-Une urne contient 50 boules portant les numéros de 1 à 50(les boules sont indiscernables au toucher)

0.5 1- On tire au hasard une boule de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

0.5 2- On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro, puis on la remet dans l'urne. On répète l'expérience précédente 3 fois .Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux fois une boule portant un numéro qui est solution de l'équation (E) ?

EXERCICE3:(3 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$

0.25 1-a)Vérifier que $(1-3i)^2$ est le discriminant de l'équation (E)

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ (on prendra z_1 imaginaire pur)

0.5 c) Montrer que: $\dfrac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2- Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère le point A d'affixe z_1 et le point B d'affixe z_2

0.25 a)Déterminer le nombre complexe e affixe du point E milieu du segment $[AB]$

0.5 b) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ et soit c l'affixe du point C image du point E par la rotation r . Montrer que : $c=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$

1 c) On considère D le point d'affixe $d=1+\dfrac{3}{2}i$. Montrer que le nombre $\left(\dfrac{z_2-d}{c-d}\right)\left(\dfrac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ est réel puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

EXERCICE4 :(6 points)

Soit n un entier naturel non nul .

On considère la fonction f_n à variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par: $f_n(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{3}{2}(x-n)}}$

Soit (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.75 1-a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$, puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 b)Montrer que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_n'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0.25 c)Montrer que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

0.5 2-a)Montrer que le point $I_n\left(n,\dfrac{1}{2}\right)$ est le centre de symétrie de la courbe (C_n)

0.5 b) Construire la courbe (C_1) .

0.75 c) Calculer l'aire de la surface plane limitée par la courbe et les droites d'équations: $x=0, x=1$ et $y=0$

0.75 3-a)Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $f_n(x)=x$ admet une solution unique u_n dans l'intervalle $]0,n[$.

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R})\quad f_{n+1}(x)\leq f_n(x)$

0.75 c) Monter que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0.5 d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE5:(4 points)

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x)=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$

0.5 1-Montrer que la fonction g est paire.

0.75 2-Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$ pour $x>0$

0.5 3-a) En utilisant une intégration par parties, vérifier que:

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt=\frac{\sin 3x-3\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

0.75 b) Montrer que: $(\forall x>0)\quad |g(x)|\leq\dfrac{2}{x}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0.5 4-a) Montrer que: $(\forall x>0)\qquad 0\leq\displaystyle\int_x^{3x}\frac{1-\cos t}{t}\,dt\leq 2x$

(Remarquer que : $(\forall t>0)\ 1-\cos t\leq t$)

0.5 b) Vérifier que: $(\forall x>0)\quad g(x)-\ln 3=\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt$

0.5 c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$

FIN