



الصفحة

1
1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2012
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	RS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعبية أو المسلط

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
 - L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
 - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat
-
- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
 - Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
 - Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
 - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
 - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

Premier exercice : (3.5 points) Les deux parties I et II sont indépendantes

I-Pour tout a et b de l'intervalle $I = [1, +\infty[$ on pose: $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

- 0.5 1) Montrer que \perp est une loi de composition interne dans I
 0.5 2) Montrer que la loi \perp est commutative et associative.
 0.25 3) Montrer que (I, \perp) admet un élément neutre.

II-On rappelle que $(M_2(\mathbb{Q}), +, \times)$ est un anneau unitaire.

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{Q}^* \right\}$

- 0.5 1) Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{Q}), \times)$
 2) On considère l'application $\varphi: \mathbb{Q}^* \rightarrow E$

$$x \mapsto M(x)$$

 0.5 a - Montrer que φ est un isomorphisme de (\mathbb{Q}^*, \times) vers (E, \times) .
 0.5 b - En déduire la structure de (E, \times) .
 0.75 c- Montrer que l'ensemble $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Q} \right\}$ est un sous groupe de (E, \times)

Deuxième exercice : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans l'ensemble \mathbb{C} l'équation : $(E) \quad z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

- 0.5 1) a-Vérifier que $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ est une solution de l'équation (E)
 0.25 b- Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est $z_2 = 3z_1$
 0.5 2) Soit θ un argument du nombre complexe z_1
 Ecrire en fonction de θ la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{5}{3} + 4i$
 II- On considère trois points distincts deux à deux A, B et Ω , d'affixes respectifs les

nombres complexes a , b et ω

Soit r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On pose $P = r(A)$ et $B = r(Q)$

et soient p et q les affixes respectifs des points P et Q

1) a- Montrer que : $p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)$ et $q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)$

b- Montrer que : $\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

c- Montrer que : $\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}$

2) On suppose que $\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

a- Montrer que $APQB$ est un parallélogramme.

b- Montrer que $\arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, en déduire que $APQB$ est un rectangle.

Troisième exercice : (3 points)

1) a- Vérifier que le nombre 503 est premier.

b- Montrer que $7^{502} \equiv 1 [503]$; en déduire que $7^{2008} \equiv 1 [503]$

2) On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) : $49x - 6y = 1$

3) Sachant que (1,8) est une solution particulière de l'équation (E); résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

3) On pose $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$

a- Montrer que le couple $(7^{2006}, N)$ est solution de l'équation (E)

b- Montrer que $N \equiv 0 [4]$ et $N \equiv 0 [503]$

c- En déduire que le nombre N est divisible par 2012

Quatrième exercice : (7.5 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

1) Etudier les variations de g sur $[0, +\infty[$

- 0.5 2) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$
II - Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$
- 1 1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- 0.5 2) Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$
- 0.5 3) Dresser le tableau de variations de f
- 1 4) Construire la courbe (C) représentative de la fonction f et la courbe (C') représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (on admet que $-0,7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe (C))
- 0.75 5) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-1, 0]$ on a : $0 < f'(x) \leq g(e)$
- 0.75 6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et que $-1 < \alpha < 0$
- 7) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- 0.5 a- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$
- 0.75 b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e) |u_n - \alpha|$
- 0.5 c- En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$
- 0.25 d- Sachant que $g(e) < 0,6$; calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Cinquième exercice : (2.5 points)

On considère la fonction F définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$

- 0.25 1) Calculer $F(1)$
- 0.75 2)a- Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$
- 0.5 b- En déduire que pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $F(x) = 0$
- 0.5 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que :
 $(\forall x > 0) ; F(x) = \left(\text{Arc tan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$
- 0.25 4) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \text{Arc tan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x$
- 0.25 5) Déduire que : $(\forall x > 0) ; \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$