



الصفحة

1

1

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا  
الدورة الاستدراكية 2012  
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

9	المعامل	RS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)		الشعبة أو المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures
  - L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
  - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat
- 
- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
  - Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
  - Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
  - Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
  - Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

**L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE**

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

**Premier exercice : (3.5 points) Les deux parties I et II sont indépendantes**

I- Pour tout  $a$  et  $b$  de l'intervalle  $I = [1, +\infty[$  on pose:  $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

1) Montrer que  $\perp$  est une loi de composition interne dans  $I$

2) Montrer que la loi  $\perp$  est commutative et associative.

3) Montrer que  $(I, \perp)$  admet un élément neutre.

II- On rappelle que  $(M_2(\square), +, \times)$  est un anneau unitaire.

On considère l'ensemble  $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \square^* \right\}$

1) Montrer que  $E$  est une partie stable de  $(M_2(\square), \times)$

2) On considère l'application  $\varphi: \square^* \rightarrow E$   
 $x \mapsto M(x)$

a - Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $(\square^*, \times)$  vers  $(E, \times)$ .

b - En déduire la structure de  $(E, \times)$ .

c- Montrer que l'ensemble  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \square \right\}$  est un sous groupe de  $(E, \times)$

**Deuxième exercice : (3.5 points) les parties I et II sont indépendantes**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

I- On considère dans l'ensemble  $\square$  l'équation : (E)  $z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

1) a- Vérifier que  $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$  est une solution de l'équation (E)

b- Montrer que la deuxième solution de l'équation (E) est  $z_2 = 3z_1$

2) Soit  $\theta$  un argument du nombre complexe  $z_1$

Ecrire en fonction de  $\theta$  la forme trigonométrique du nombre complexe  $\frac{5}{3} + 4i$

II- On considère trois points distincts deux à deux  $A$ ,  $B$  et  $\Omega$ , d'affixes respectifs les

الصفحة 3 4	RS25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2012 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
		<p>nombres complexes <math>a, b</math> et <math>\omega</math></p> <p>Soit <math>r</math> la rotation de centre <math>\Omega</math> et d'angle <math>\frac{\pi}{3}</math>. On pose <math>P = r(A)</math> et <math>B = r(Q)</math></p> <p>et soient <math>p</math> et <math>q</math> les affixes respectifs des points <math>P</math> et <math>Q</math></p> <p>0.5 1) a- Montrer que : <math>p = \omega + e^{i\frac{\pi}{3}}(a - \omega)</math> et <math>q = \omega + e^{-i\frac{\pi}{3}}(b - \omega)</math></p> <p>0.25 b-Montrer que : <math>\frac{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}</math></p> <p>0.5 c- Montrer que : <math>\frac{p - a}{q - b} = \frac{\omega - a}{\omega - b} e^{i\frac{4\pi}{3}}</math></p> <p>2) On suppose que <math>\frac{\omega - a}{\omega - b} = e^{i\frac{2\pi}{3}}</math></p> <p>0.25 a-Montrer que <math>APQB</math> est un parallélogramme.</p> <p>0.75 b- Montrer que <math>\arg\left(\frac{b - a}{p - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]</math>, en déduire que <math>APQB</math> est un rectangle.</p> <p><b>Troisième exercice : (3 points)</b></p> <p>0.25 1) a-Vérifier que le nombre 503 est premier.</p> <p>0.75 b-Montrer que <math>7^{502} \equiv 1 [503]</math> ; en déduire que <math>7^{2008} \equiv 1 [503]</math></p> <p>2) On considère dans <math>\mathbb{R}^2</math> l'équation (E) : <math>49x - 6y = 1</math></p> <p>0.5 Sachant que (1,8) est une solution particulière de l'équation (E) ; résoudre dans <math>\mathbb{R}^2</math> l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.</p> <p>3) On pose <math>N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}</math></p> <p>0.25 a-Montrer que le couple <math>(7^{2006}, N)</math> est solution de l'équation (E)</p> <p>1 b- Montrer que <math>N \equiv 0 [4]</math> et <math>N \equiv 0 [503]</math></p> <p>0.25 c- En déduire que le nombre <math>N</math> est divisible par 2012</p> <p><b>Quatrième exercice : (7.5 points)</b></p> <p>I - Soit <math>g</math> la fonction numérique définie sur <math>[0, +\infty[</math> par : <math>g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}</math></p> <p>0.5 1) Etudier les variations de <math>g</math> sur <math>[0, +\infty[</math></p>

الصفحة	RS25	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2012 - الموضوع - مادة: الرياضيات - شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)
3 4		
0.5	2) En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$	
1	II - Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$	
0.5	1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$	
0.5	2) Montrer que pour tout réel $x$ on a : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$	
0.5	3) Dresser le tableau de variations de $f$	
1	4) Construire la courbe $(C)$ représentative de la fonction $f$ et la courbe $(C')$ représentative de la fonction $(-f)$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (on admet que $-0,7$ est une valeur approchée de l'abscisse du seul point d'inflexion de la courbe $(C)$ )	
0.75	5) Montrer que pour tout $x$ de l'intervalle $[-1, 0]$ on a : $0 < f'(x) \leq g(e)$	
0.75	6) Montrer que l'équation $f(x) + x = 0$ admet une solution unique $\alpha$ dans $\mathbb{R}$ et que $-1 < \alpha < 0$	
0.5	7) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -f(u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$	
0.75	a-Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; -1 \leq u_n \leq 0$	
0.5	b- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ;  u_{n+1} - \alpha  \leq g(e) u_n - \alpha $	
0.25	c-En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ;  u_n - \alpha  \leq (g(e))^n$	
0.25	d- Sachant que $g(e) < 0,6$ ; calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	
	<b>Cinquième exercice : ( 2.5 points)</b>	
	On considère la fonction $F$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$	
0.25	1) Calculer $F(1)$	
0.75	2)a-Montrer que $F$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $F'(x)$	
0.5	b- En déduire que pour tout $x$ de l'intervalle $]0, +\infty[$ on a : $F(x) = 0$	
0.5	3) En utilisant une intégration par parties , montrer que : $(\forall x > 0) ; F(x) = \left( \text{Arc tan } x + \text{Arc tan } \frac{1}{x} \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$	
0.25	4) Montrer que : $(\forall x > 0) ; \text{Arc tan } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan } x$	
0.25	5) Dédurre que : $(\forall x > 0) ; \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arc tan } t}{t} dt$	