الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2011
الموضوع

9	المعامل	RS25	الرياضيات	المادة
4	مدة الإنجاز		شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	الشعب(ة) او المسلك

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices tous indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

-Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques.

- Le deuxième exercice se rapporte à l'arithmétique.

-Le troisième exercice se rapporte aux nombres complexes.

- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse.

- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse.

Les calculatrices non programmables sont autorisées

Premier exercice :(3.5 points)

Pour tout x et y de l'intervalle $I=]0,1[$ on pose : $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

0.5 1-a)Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 c) Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2-Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3-On considère les deux ensembles $H=\left\{2^n \,/\, n\in\mathbb{Z}\right\}$ et $K=\left\{\dfrac{1}{1+2^n} \,/\, n\in\mathbb{Z}\right\}$

0.5 a)Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

0.5 b) On considère l'application : $\varphi:\ H\to I$

$$x\to\frac{1}{1+x}$$

montrer que φ est un homomorphisme de $(H,\times)$ vers $(I,*)$

0.5 c)En déduire que K est un sous-groupe de $(I,*)$

Deuxième exercice :(2.5points)

Soit x un nombre entier naturel tel que :$10^x\equiv 2\ [19]$

0.25 1- a) vérifier que : $10^{x+1}\equiv 1\ [19]$

0 .5 b) Montrer que : $10^{18}\equiv 1\ [19]$

2- Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

0.75 a) Montrer que : $10^d\equiv 1\ [19]$

0.5 b) Montrer que : $d=18$

0.5 c)En déduire que : $x\equiv 17\ [18]$

Troisième exercice :(4 points)

Première partie : On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E)\quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$$

0.5 1-Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E)

0.5 2-Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que :

$$(\forall z\in\mathbb{C})\quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

0.5 3-a) Déterminer les deux racines carrées du nombre $5-12i$

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Deuxième partie : Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A et B et C d'affixes respectifs $a=-1+3i$ et $b=-2i$ et $c=2+i$

0.5 1-Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C

2-On considère la rotation R_1 de centre B et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre A et dont une mesure de l'angle est $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ .Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation R_1 et M_2 son image par la rotation R_2.

0.5 a)Vérifier que l'expression complexe de la rotation R_1 est : $z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$

0.5 b) Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z

0.5 c) En déduire que I , le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Quatrième exercice :(6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

1 1- calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

0.25 2-a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0 .75 b) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera puis dresser le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}

0 .75 3) Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

0 .5 4- a) Calculer l'intégrale $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$ (on posera : $t = f^{-1}(x)$)

0 .5 b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C') et les droites d'équations : $x=1$; $x = e+1$ et $y = x$

5- Pour tout entier naturel non nul n ,on considère l'équation : (E_n) $x + \ln x = n$

0.25 a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n .

0.5 b) Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

0.5 6-a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $f(x_n) \le f(n)$ en déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $x_n \le n$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $n - \ln(n) \le x_n$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n - n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$

Cinquième exercice :(4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n}$$

0.5 1-Montrer que pour $n \geq 2$ il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$

0.75 2-Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente.

(On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$)

0.5 3-a)Vérifier que pour $t \neq 1$ on a : $1 + t + t^2 .... + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

0.5 b) En déduire que : $\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + ... + \frac{\alpha_n^n}{n} = -ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

0.5 4-a) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ $\quad 1 + ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \geq 2)$ $\quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0.75 c) En déduire que : $\ell = 1 - e^{-1}$

FIN