

EXERCICE 1

On considère dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$   $Z^2 + (6 + 5i)Z + 2 + 16i = 0$

- 1) a) déterminer les racines carrées du nombre  $3 - 4i$
- b) déduire les solutions de  $(E)$
- 2) le plan  $(P)$  est muni d'un  $\mathcal{R.O.N.D}(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points  $B$ ,  $A$  et  $C$  d'affixes respectives  $b = -4 - 2i$  ;  $a = i$

et  $c = -2 - 3i$

- a) montrer que  $ABC$  est isocèle en  $C$
- b) soit  $R$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  on pose  $D = R(A)$  et  $R(E) = C$
- (i) montrer que l'affixe de  $E$  est  $Z_E = -5 - 4i$  puis déterminer l'affixe du point  $D$
- (ii) soit  $I$  le milieu du  $[AC]$  montrer que  $\frac{d - Z_E}{Z_I - b} = 2i$

En déduire que  $(DE) \perp (IB)$  et  $DE = 2BI$

EXERCICE 2

On définit sur  $\mathbb{R}$  la loi  $T$  par :  $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$   $xTy = a - (a - x)(a - y)$

- 1) a) montrer que  $T$  est commutative ; associative
- b) déterminer l'élément neutre de  $T$
- c) montrer que  $(\mathbb{R} - \{a\}, T)$  est un groupe commutatif
- 2) montrer que  $(]-\infty, a[, T)$  est un sous groupe de  $(\mathbb{R} - \{a\}, T)$
- 3) soit  $f$  l'application définie par :  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) = a - x$ 
  - a) montrer que  $f$  est un isomorphisme de  $(\mathbb{R}, \times)$  vers  $(\mathbb{R}, T)$
  - b) soit  $x$  de  $\mathbb{R}$  et  $n \geq 2$  déterminer en fonction de  $x$  et  $n$  le nombre  $\underbrace{xTxT.....Tx}_{n \text{ fois } x}$

**EXERCICE 3**

- (I) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{2e^x}{\sqrt{1+x^2}}$
- 1) a) calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  - b) étudier la branche infinie de  $(C_f)$  en  $+\infty$
  - 2) calculer  $f'(x)$  et étudier les variations de  $f$  puis donner le tableau de variations
  - 3) prouver que (1)  $(\forall t > 0) \quad 2e^t - t - t^2 > 0$   
 et (2)  $(\forall t > 0) \quad 1 + t > \sqrt{1 + t^2}$
  - 4) en déduire que  $(\forall x \geq 0) \quad f(x) > x$
  - 5) soit  $(U_n)_n$  la suite définie par :  $U_0 = 1$  et  $U_{n+1} = f(U_n)$ 
    - a) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \geq 1$
    - b) étudier la monotonie de  $(U_n)_n$  et déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
- (II) soit  $G$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $G(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$
- 1) montrer que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $G'(x)$
  - 2) montrer que  $G$  est impaire
  - 3) a) montrer que  $(\forall x > 0) \quad G(x) \geq \frac{2(e^x - e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}}$   
 b) déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$  et calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x}$
  - 4) dresser le tableau de variations de  $G$