2 BAC SM	DV3 TR 2	2016-2017

EXERCICE 1

Soit $J =]-1,1[$ et on considère la lois T telle que : $xTy = \dfrac{x+y}{1+xy}$ et on pose $I = \left\{ \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$

1) a) montrer que $\left(\forall (x,y) \in J^2\right) \quad 1 + xy \neq 0$

b) montrer que T est une lois de composition interne dans J

2) montrer que T est associative dans J

3) on considère l'application : $\begin{array}{l} f \quad \mathbb{R}^{*+} \to J \\ x \to f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$

a) montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^{*+}$ vers J et déterminer sa réciproque f^{-1}

b) montrer que f est un morphisme de $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ vers (J, T) puis déduire la structure de (J, T)

4) a) montrer que I est une partie stable dans (J, T)

b) montrer que (I, T) est un sous-groupe de (J, T)

5) On pose $x^{(n)} = \underbrace{x\mathrm{T}x\mathrm{T}.....\mathrm{T}x}_{n\ fois}$. Montrer que $(\forall n \geq 2) \quad x^{(n)} = \dfrac{(1+x)^n - (1-x)^n}{(1+x)^n + (1-x)^n}$

EXERCICE 2

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 3$

1) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $(E) \quad x^2 - y^2 = p$

2) on considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(F) \quad p^2x^2 - y^2 = p^3$

a) montrer que si le couple (x,y) est solution de (F) alors $y \equiv o \ [p]$

b) déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (F)

3) a) montrer que $\left(\forall k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}\right) \quad p / C_p^k$

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (n+1)^p - n^p - 1 \equiv 0 \ [p]$ (utiliser la formule du binôme)

c) déduire que $(\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (n+1)^p - n^p - 1 \equiv 0 \ [2p]$

EXERCICE 3

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E) : (x+1)^2 = 9 + 5y$

a) montrer que si (x,y) est solution de (E) alors $x \equiv 1 \ [5]$ ou $x \equiv 2 \ [5]$

b) résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E)

2) montrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}) \quad (5k^2 + 4k - 1) \wedge (5k+1) = (k-3) \wedge 8$

3) résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système $\begin{cases} \overline{121}^x = \overline{59}^y \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1 \ [5] \end{cases}$