2éme bac SM	Contrôle 2	14-2015

Exercice 1

Soit p un entier premier tel que $p \geq 3$

1) montrer $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $4^n \equiv 1 \; [p]$

2) soit q le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ vérifiant $4^q \equiv 1 \; [p]$

r le reste de la division de n par q

a) Montrer que $4^r \equiv 1 \; [p]$

b) déduire que q divise n

4) déterminer le plus petit entier q tel que $4^q \equiv 1 \; [13]$

Exercice 2

Partie (1)

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = 2\sqrt{x}\, e^{-x}$

1) a) calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) étudier la dérivabilité de f à droite de 0

2) a) montrer que $(\forall x > 0)$ $f'(x) = \dfrac{1-2x}{\sqrt{x}} e^{-x}$

b) étudier les variations de f et donner le tableau de variations

3) tracer la courbe (C_f)

Partie (2)

Soit h la restriction de f sur $I = \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

1) montrer que h est bijective de I vers J à déterminer

2) soit φ la bijection réciproque de h .

a) dresser le tableau de variations de φ

b) montrer que $(\forall n \geq 2)\ (\exists! a_n \in J)$ $\varphi(a_n) = \dfrac{1}{n}$

c) montrer que $(a_n)_n$ est décroissante et convergente

3) a) montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ et prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$

b) en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}\left(e^{a_n} - 1\right) = 2$

Parte(3)

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{4x} f(t)\,dt$

1) montrer que $(\forall x > 0)$ $\dfrac{28}{3} x\sqrt{x} e^{-4x} \leq F(x) \leq \dfrac{28}{3} x\sqrt{x} e^{-x}$

2) calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{F(x)}{x}$

3) a) montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$

et $(\forall x > 0)$ $F'(x) = 2\sqrt{x}\, e^{-4x}\left(8 - e^{3x}\right)$

b) étudier les variations de F

4) tracer la courbe de F (on donne $F(\ln 2) \simeq 0.9$)