Groupe scolaire Anisse

Mathématiques Examen Blanc 2 Session Avril 2018	Branche : 2 SM Durée : 4 heures Date : 26/04/2018 Coeff : 9

Problème : 10 Pts

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} ln^2\ (x)$

I.
0,5 1- Calculer $\lim_{0^+} f_{(x)}$ et $\lim_{+\infty} f_{(x)}$ et interpréter les résultats.
1 2 – Dresser le tableau de variation de f.
1 3 – Montrer que f admet deux points d'inflexion.
1 4 – Représenter C_f dans un repère orthonormée $(o\ ,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\|$= 1cm
on prend $e^2\ \cong$ 7,4 et $\frac{4}{e^2} \cong$ 0,6.
0,5 5 – Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , (o $\vec{\imath}$) , les droites d'équation $x = 1$ et $x = e^2$

II. $\forall\rho \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2}\, dx$
0,5 1- Calculer I_1 .
0,5 2- a. Montrer que $\forall\rho \in \mathbb{N}^*$, $I_{p+1=}$ $-\frac{2^{p+1}}{e^2}$ + (p + 1)I_p
0,75 b- En déduire I_2 , I_3 *et* I_4 .
0,5 c- Interpréter géométriquement $\pi.I_4$

III. On pose $F_{(x)} = \int_{\ln (x)}^{1+\ln x} f(t)dt$.
0,5 1- Montrer que F est définie sur $I = \ ]1,+\infty[$
0,5 2- Monter que $\forall_x \in I$, $\exists\ \beta\ \in\ [\ln x\ ; \ln(x) + 1]/\ F_{(x)}\ =\ f_{(\beta)}$ puis calculer $\lim_{+\infty} F(x)$.
0,75 3- $\forall\ \alpha\ \in\ ]0,1[$, on pose : $\mathrm{A}(x) = \int_\alpha^1 \mathrm{f}(\ t)\ dt$. Calculer $\mathrm{A}(x)$ en fonction de α , puis $\lim_{x\to 1^+} F(x)$.
0,75 4- Montrer que F est dérivable sur I , puis calculer $F'(x)$.
5- On considère la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ définie par : $U_n = \int_1^{\frac{1}{n}+1} f(nt)dt$.
0,75 a- Montrer que $U_n = \frac{1}{n}.\int_n^{1+n} f(t)dt.$
0,5 b- Calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

<u>Exercice 1 : 03 Pts</u>

Le plan P est rapporté à un repère orthonormée $(o\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ on considère l'application F de P $\longrightarrow$ P, qui laisse invariant Ω(i) et qui associé à chaque point M(Z) de P - {Ω} le point M'(Z') tel que : $\begin{cases} \Omega MM' \text{ est un } triangle\ rectangle\ en\ M \\ et \\ (\overrightarrow{\Omega M},\ \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \end{cases}$

1 1- Déterminer l'écriture complexe de : F

0,5 2- Montrer que Ω est le seul point invariant par F

0,5 3- Soit R $(\Omega\,, \frac{\pi}{3})$ la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
Montrer que F = R o h avec h une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport.

1 4- Soit H la projection orthogonale de M sur (ΩM') et on pose : F(H) = M''
Montrer que Ω , M , M' et M'' sont cocycliques.

<u>Exercice 2 : 02,5 Pts</u>

Soit m un entier naturel supérieur ou égal à 2 .

0,5 1- Montrer que m^2 et m-1 sont premiers entre eux.

0,5 2- a- En déduire que l'équation $m^2 x + (m-1)y = 1$ (E) admet au moins une solution.

0,5 b-résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) .

3- On pose m = 7

0,5 a- Montrer que 4o1 est un nombre premier.

0,5 b- En déduire que $2011^{49^2} \equiv 2011[401]$.

<u>Exercice 3 : 04,5Pts</u>

On pose E l'ensemble de couples (a , b) tel que a ≠ -1 et on considère l'application $f_{(a\,,b)}$ définie par :

$$f_{(a\,,b)} : \not\subset \;\rightarrow\; \not\subset$$

$$Z = x + iy \;\rightarrow Z' = x' + iy' \,/ \begin{cases} x' = (1+a)x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

0,5 1- Vérifier que $\forall(a , b) \in E$, $\forall(a' , b') \in E$

$f_{(a',b')} \circ f_{(a,b)} = f_{(a+a'+aa',b+b')}$, puis montrer que " o " est une loi de composition interne dans l'ensemble A = $\{f_{(a,b)} \mid (a , b) \in E\}$.

0,5 2- Montrer que $\forall(a , b) \in E$; $f^{-1}_{(a,b)} = f_{(\frac{-a}{1+a}; -b)}$

0,5 3- Montrer que (A , o) est un groupe commutatif.

4- On définie sur E la loi de composition interne " T" par : $\forall(a , b) \in E$, $\forall(a' , b') \in E$: $(a , b)\, T\, (a' , b') = (a+a'+aa' , b+b')$ et on considère l'application h : $A \to E$

$$f_{(a,b)} \to (a , b)$$

1 a- Montrer que h est un isomorphisme de (A , o) vers (E , T).

0,5 b- En déduire la structure que (E , T).

1 c- Déterminer l'élément neutre de (E , T) et le symétrique d'un élément (a , b) de (E , T).

0,5 d- On pose H = $\{ (x, \ln(x+1)) / x > -1\}$, montrer que (H , T) est un groupe commutatif.