

2017-2018

Exercice 1:

$\forall m \in \mathbb{C}^*, E_m: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \text{ définie par } (2m+1+i)z + m(m+1+i) = 0$

1- Vérifier que $z_1 = m$ est une solution de E_m et déterminer z_2

2- Mg $|z_1| = |z_2| \iff \operatorname{Im}(m) + \operatorname{Re}(m) = -1$

3- Soient $A(m), B(m+1+i), C(m-2+2i)$

et $f: \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$

$m \in \mathbb{P} \mapsto m' \in \mathbb{P} / z' = 2i z + m - 2i m$

a - Déterminer la nature de f et ses éléments caractéristiques.

b - Mg $f(B) = C$ et en déduire la nature de $f(B)$

4 - Soit $D(m + \frac{2}{3}(1+3i))$

a - Mg B, C et D sont alignées et que $(AD) \perp (BC)$

b - En déduire $|z_D - z_A| |z_C - z_B| = |z_D - z_A| \times |z_C - z_A|$

Exercice 2:

On considère dans $\mathbb{Z}$: $29x + 13y = 1 \quad (E)$

1 - Mg (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}^2$

2 - Résoudre (E) .

3 - Soit $n \in \mathbb{N} / 10^n = 3 \pmod{29}$

2 - Mg $10^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

b - Mg $10^{n+1} \equiv 1 \pmod{29}$

c - On pose $d = (n+1) \wedge 28$

Mg $10^d \equiv 1 \pmod{29}$ et que $d = 28$

Exercice 3:

$g(x) = \frac{2x}{x + \ln(x+1)}$, $\forall x > 0$; et $g(0) = 1$

1 - Mg g est continue en 0 à droite.

2 - Mg $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \forall x > 0$

3 - Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ et dresser le TV de g .

4 - $\forall x > 0$ on pose $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ et $G(0) = 1$

a - Étudier la dérivabilité de G en 0 à droite et interpréter le résultat obtenu.

b - Mg G est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $G'(x)$.

c - Déterminer les variations de G .

5 - On pose $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k + \ln(k + \frac{k}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$

a - calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ en fonction de G

b - On pose $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$. Vérifier que $\frac{1}{2} \leq l < 1$.