

Exercice 1:

$$(E): Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i)Z + 17i = 0$$

1. Déterminer a, b etc tels que

$$Z^3 + (-8+i)Z^2 + (17-8i)Z + 17i = (Z+i)(Z^2 + bZ + c)$$

2. Résoudre (E).

3. On pose $A(4+i), B(4-i), C(-1)$
 $O(0,0)$

$R(O, \frac{\pi}{2})$ la rotation de centre O
 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Déterminer S le point image de
 A par R .

b. Mq A, B, C, S appartiennent à
 un cercle $\mathcal{C}$ à déterminer

4) à tous points $M(Z) / Z \neq 2$, on
 associe le point $M'(Z') / Z' = \frac{2Z+10-2i}{Z-2}$

a) Déterminer les affixes de A', B', C'
 associés à A, B, C

b) Mq A', B', C' appartiennent
 au même cercle $\mathcal{C}'$ dont on
 déterminera le centre et le rayon.

c) Mq $|Z'-2| = 2\sqrt{5}$ si $M(Z) \in \mathcal{C}$

d) En déduire $M'(Z')$ appartient à
 un cercle dont on déterminera
 le centre et le rayon.

Exercice 2:

On définit sur $E = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ la loi suivante.

$$\forall (x, y) \in E^2, x * y = x + y - 2xy$$

1. Mq $*$ est une L.e.T

2. Mq $*$ est commutative, associative
 admet un élément neutre et que tous
 les éléments de E sont symétrisables.

$$3. Mq \quad \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$$

$$\underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{2} [1 - (1 - 2x)^n]$$

$$4. Soit F = \left\{ M_{2x} = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix} / x \in E \right\}$$

$$Mq F \text{ est stable de } (M_3(\mathbb{R}), \times)$$

5. on considère l'application

$$f: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto M_{2x}$$

a- Mq f est un isomorphisme de $(E, *) \rightarrow (F, \times)$

b- En déduire la structure de $(F, \times)$

c- On note $B = M(\frac{1}{2})$

$$Mq \quad B^n = M\left(\frac{1-2^n}{2}\right)$$

$$\text{et que } (B^n)^{-1} = M\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$