

Partie I :

$$f(x) = \frac{x}{x - \ln x}, x > 0 \text{ et } f(x) = -x + \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right), x \leq 0$$

- 1 - Mq $D_f = \mathbb{R}$.
- 2 - Etudier la continuité de f en 0.
- 3 - Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 4 - Calculer $f'(x)$ et dresser le T.V de f sur $\mathbb{R}$.
- 5 - Etudier les branches infinies de f .
- 6 - Construire C_f .

Partie II :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \text{ on pose } U_n = \int_{-\ln 2}^0 (f'(x))^n dx$$

- 1 - Mq $\forall x \in [\ln 2, 0]$, $-\frac{3}{5} \leq f'(x) \leq 0$
- 2 - En déduire que $|U_n| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \ln 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
et Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Partie III :

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$

$$\text{par } F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

- 1 - Mq $\forall x \in]0, e[$: $0 \leq F(x) \leq \sqrt{x} f(\sqrt{x})$
- 2 - En déduire que F est dérivable en 0 à droite.
- 3 - Mq F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que
 $\forall x > 0, F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x})}$
- 4 - Mq $\forall t \geq 1, 1 + \frac{\ln(t)}{t} \leq f(t) \leq 1 + \ln(t)$
- 5 - En déduire que : $\forall x > 1$

$$\sqrt{x} - 1 + \frac{(\ln \sqrt{x})^2}{2} \leq \int_1^{\sqrt{x}} f(t) dt \leq \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$$

- 6 - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$
- 7 - Mq $F'(x)$ a le même signe que $1 - x$ sur $]0, +\infty[$.
- 8 - Construire C_F

On donne $F(1) \approx 0,3$
l'unité est : 2cm.