

Exercice 1 $g(0) = 1$ et $g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ si $x > 0$

- I)
- 1 - Mq $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1$
 - 2 - Déterminer le tableau de variation de g
 - 3 - On pose $h(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$
 - a - Mq $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leq h''(x) \leq x$
 - b - En déduire que $0 \leq h(x) \leq \frac{x^3}{6}$
 - c - " " la dérivabilité de g en 0 à droite

II) on considère la fonction: $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$

- 1 - Mq f est continue en 0 à droite.
- 2 - a) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = 2g(2x) - g(x)$.
b) Étudier la dérivabilité de f en 0 à droite.
- 3 - a) Mq $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2} (2x + 1 - (x + 1)e^x)$
b) Déterminer le Tableau de variation de f
- 4 - Construire C_f .

Exercice 2 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $\begin{cases} F(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x^2} f(t) dt, x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

- 1 - a - Mq f et F sont impaires.
b - Donner le T.V de f .
c - Déterminer l'équation de la tangente de C_f en 0 et représenter C_f
d) - Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$
et calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = \ln 2$
(on prend $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 2 \text{ cm}$)

- 2 - a - Mq $x f(x^2) \leq F(x) \leq x f(2x^2)$, $\forall x > 0$
b - En déduire que F est continue et dérivable en 0 à droite
c - Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - x)$ et interpréter géométriquement le dernier résultat.