14-2015	DEVOIR	2ème bac sm

Exercice 1

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x\arctan x$

(I) 1) a) étudier la parité de f

b) calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$

2) calculer la dérivée $f'(x)$ et montrer que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$

3) tracer la courbe (C_f)

(II) 1) résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'inéquation $f(x) > x$

2) on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = \sqrt{3}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq \sqrt{3}$ (on donne $\tan(1) \simeq 1,56$)

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geq \dfrac{\pi}{3}$ puis déduire que $(U_n)_n$ est croissante

c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq \left(\dfrac{\pi}{3}\right)^n \sqrt{3}$ et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

(III) 1) montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{\pi n}{4n+1}$ admet dans $[0,+\infty[$ une unique solution x_n

2) étudier la monotonie de la suite $(x_n)_n$

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ x_n < 1$

b) en déduire que $(x_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite

Exercice 2

Soit n un entier naturel tel que $n > 2$.

On considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(x) = x^n - 2 - n(x-1)$

1) Etudier le sens de variation de f_n

2) Montrer que $f_n(x) = 0$ admet deux solutions a_n et b_n avec $0 < a_n < 1 < b_n$

3) a) étudier le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

b) étudier la monotonie de chacune des deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$

4) montrer que $(\forall n > 2)\ \dfrac{-2}{n} < a_n - 1 < \dfrac{-1}{n}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

5) a) montrer que $(\forall x > 0)(\forall n > 2)\ (1+x)^n \geq 1 + nx + C_n^2 x^2$

b) déduire le signe de $f_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$

c) prouver que $(b_n)_n$ est convergente en déterminant sa limite