

Exercice (1)

Soit n un entier supérieur à 2.

on considère la fonction f_n définie sur $I = \left] -\infty, \frac{\pi}{2} \right]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \operatorname{arcatn} \left(\sqrt[n]{\tan x} \right) & ; \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \\ f_n \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \\ f_n(x) = \frac{x}{\sqrt[n]{1-x}} & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

- 1) a) étudier la continuité de f_n sur I
- b) étudier la dérivabilité de f_n à droite et à gauche de 0
- c) étudier la dérivabilité de f_n à gauche de $\frac{\pi}{2}$
- d) soit x de $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right]$ calculer $f_n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + f_n(x)$
interpréter le résultat géométriquement
- 2) étudier la branche infinie de la courbe (C_{f_n}) en $-\infty$
- 3) a) calculer la dérivée de f_n sur chacun des intervalles $\left] -\infty, 0 \right[$ et $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$
- b) montrer que f_n réalise une bijection de I vers I
- c) déterminer $f_2^{-1}(x)$ pour tout x de I
- 4) a) résoudre dans $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ l'inéquation $f_n(x) < x$
- b) tracer dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les courbes de f_2 et f_2^{-1}

5) soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{\pi}{3}$ et $U_{n+1} = f_2(U_n)$

- a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
- b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
- c) déduire que $(U_n)_n$ est convergente et calculer sa limite
- 6) a) montrer que $(\exists! a_n \in I) \quad f_n(a_n) = 1$
- b) montrer que $(\forall n \geq 2) \quad a_n > \frac{\pi}{4}$ en déduire que $(\forall n \geq 2) \quad a_n > 1$
- c) montrer que $(\forall x > 1) \quad \sqrt[n]{x} > \sqrt[n+1]{x}$
puis comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$
- d) étudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ et déduire qu'elle est convergente puis déterminer sa limite

Exercice (2)

on considère la suite $(V_n)_{n \geq 2}$ définie par : $V_n = \sqrt[n]{n}$

- 1) a) montrer par récurrence que : $(\forall n \geq 3) \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < n$
- b) en déduire que $(V_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et convergente
- 2) a) montrer que $(\forall a > 0)(\forall n \geq 2) \quad (1+a)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} a^2$
- b) en déduire que $(\forall n \geq 2) \quad \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n$

Bonus

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[n]{n} - 1 \right)^2 = 0$