

Exercice 1 (5,5 points)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x + 1 + x^2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$

- 0,5 1) a) Montrer que $D_f = \mathbb{R}^*$.
- 1,25 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement les résultats obtenus.
- 0,5 2) a) Montrer que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$.
- 1,25 b) Dédurre $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 0,5 3) Prouver que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x f(x)$ est prolongeable par continuité en zéro.
- 0,5 4) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$, l'équation $f(x) = 1$.
- 1 5) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \frac{|x| - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x^2 + 2} - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$.

Exercice 2 (3 points)

- 1) f et g sont deux fonctions définies et continues sur $[0; 1]$ telles que :
 $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ et $f([0; 1]) \subset]0; 1[$
- 1,5 Montrer que : $(\exists c \in]0; 1[) / 2020 f(c) = 2019 g(c) + c$
- 2) f est une fonction continue sur $[19; 20]$ telle que $f(19) < 0$.
- 1,5 Démontrer que l'équation $f(x) = \frac{x - 19}{x - 20}$ admet au moins une solution α dans $]19; 20[$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\frac{\pi}{2}; +\infty[$ par : $f(0) = \frac{3}{8}$ et
 $f(x) = \frac{x \tan x + \cos x - 1}{x^2} - \frac{1}{8}$ si $x < 0$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+16} - 6}{x}$ si $x > 0$

- 1,5 1) a) Montrer que f est continue en zéro.
- 1 b) Montrer que f est continue sur $]-\frac{\pi}{2}; +\infty[$.
- 1 c) Montrer que $(\exists \alpha \in [0; 20]) / f(\alpha) = \frac{1}{4}$ (On donne $f(20) \approx 0,245$)
- 0,5 2) a) Montrer que $(\forall x \in]0; +\infty[) f(x) > 0$
- 1 b) Montrer que : $(\exists (a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2) (\forall x \in [1; 2]) ax + 6 \leq \sqrt{x+4} + \sqrt{x+16} \leq bx + 6$

Exercice 4 (6,5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^4}{x^2+1} (a + E(1/x^2)) ; x \neq 0 \\ f(0) = a - 1 \end{cases}$$
 ou $a \in \mathbb{R}^*$.

- 2 1) a) Donner les expressions simplifiées de $f(x)$ sur chacun des intervalles $]1; +\infty[$ et $] \frac{1}{\sqrt{a}}; 1[$.
- 0,5 b) f est-elle continue en 1 ?
- 1 2) a) Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[) \frac{x^2}{x^2+1} (1 + (a-1)x^2) < f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2} (1 + ax^2)$
- 0,5 b) Déduire la valeur de a pour que f soit continue en zéro.
- 3) On prend $a=1$ et on considère la fonction g restriction de f sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$
- 0,25 a) Vérifier que $(\forall x \in I) g(x) = \frac{x^4}{1+x^2}$
- 0,75 b) Calculer $g'(x)$ pour $x \in I$ puis déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on donnera
- 0,5 c) Déduire que l'équation $g(x) = \frac{2019}{2020}$ admet une seule solution dans I .
- 1 d) Déterminer $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.