

Exercice :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$\begin{cases} f(x) = 1 + \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{1}{\sqrt{2-x}}; x < 2 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 2.
2. Etudier la dérivabilité de f en 2 et interpréter les résultats obtenus.
3. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat obtenu.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
5. Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$
6. Montrer que f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$ et $]-\infty, 2[$ et dresser le tableau de variation de f .
7. Tracer la courbe de f .
8. Soit g la restriction de f sur $]-\infty, 2[$.
 - (1) Montrer que g est bijective de $]-\infty, 2[$ vers un intervalle J à déterminer.
 - (2) Tracer la courbe de g^{-1}
 - (3) Déterminer $g^{-1}(x), \forall x \in J$.

Questions indépendantes

- 1) Montrer que si f est continue sur $[-1, 1]$ alors il existe c de $]-1, 1[$ tel que $f(c) = \frac{2c}{c^2 - 1}$
- 2) Montrer que $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4}$
- 3) Montrer que $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 4) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\arctan(x-3) + \arctan(x+3) + \arctan(x) = \frac{5\pi}{4}$$
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \sqrt{x}$