

المظاهر الطاقية

(خاص بمسلكي ع.رياضية وع.فيزيائية)

- شغل قوة ثابتة خلال انتقال مستقيمي يساوي الجداء السلمي لمتجهة القوة ومتجهة انتقال نقطة تأثيرها.

تذكير:

$$\alpha = (\vec{F}, \vec{AB}) \quad \text{مع} \quad W\vec{F}_{A \rightarrow B} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

- وحدة الشغل $W\vec{F}_{A \rightarrow B}$ في النظام العالمي للوحدات هي الجول الذي نرمز إليه ب: (J)

- وحدة شدة القوة F النيوتن (N) ووحدة المسافة AB المتر (m).

- مبرهنة الطاقة الحركية :

في معلم غاليلي ، تغير الطاقة الحركية لجسم صلب ، في حركة إزاحية أو في حالة دوران حول محور ثابت ، بين لحظتين يساوي مجموع أشغال القوى المطبقة عليه بين هاتين اللحظتين.

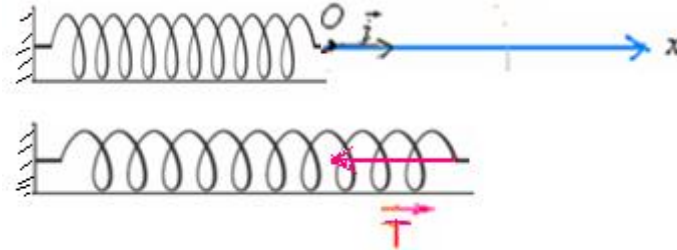
$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \quad \Delta E_c = \Sigma W\vec{F}$$

ملحوظة : الطاقة الميكانيكية لجسم صلب تساوي في كل لحظة مجموع طاقة وضعه و طاقته الحركية.
في حالة غياب الاحتكاكات تحفظ الطاقة الميكانيكية.

II - الدراسة الطاقية للنواس المرن :

(1) شغل قوة مقرونة بتوتر نابض

نعتبر نابضا ذي لفات غير متصلة صلابته K في وضع أفقي كما يبينه الشكل التالي :



نجذب النابض أفقيا بمسافة x_m ثم نحرره فتصبح له حركة تذبذبية حول موضع التوازن .

لتكن $\vec{T}$ القوة المقرونة بتوتر النابض خلال الحركة التذبذبية . لدينا : $\vec{T} = -K.x.\vec{i}$ (هذه القوة غير ثابتة .)

الشغل الجزئي δW للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\vec{\delta \ell} = \delta x.\vec{i}$ هو :

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{\delta \ell} = -K.x.\vec{i} \cdot \delta x.\vec{i} = -K.x.\delta x. \quad \text{إذن :} \quad \delta W = -K.x.\delta x.$$

وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية فإن شغل القوة $\vec{T}$ المقرونة بتوتر النابض خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات

الأفصول x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 نحصل عليه باستعمال الحساب التكاملي بحيث : $dW = -K.x.dx$

$$W\vec{T}_{M_1 \rightarrow M_2} = \int_{x_1}^{x_2} -K.x.dx = -K \int_{x_1}^{x_2} x.dx = K \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}K(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}K(x_1^2 - x_2^2)$$

(2) الدراسة الطاقية للنواس المرن

(أ) طاقة الوضع المرنة :

طاقة الوضع المرنة للنواس المرن هي الطاقة التي تمتلكها المجموعة جراء تشويه النابض وتعطيها العلاقة التالية :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2 + c^{te}$$

حيث : K صلابة النابض . x : إزاحته.

والثابتة c^{te} تحدد قيمتها باستعمال الحالة المرجعية .

وعمليا نختار كحالة المرجعية $E_{pe} = 0$ عندما يكون النابض غير مشوها أي عند $x = 0$.

بالتعويض في التعبير السابق نحصل على $c^{te} = 0$.

وبالتالي يعبر عن طاقة الوضع للنواس المرن بالعلاقة : $E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2$ باعتبار $E_{pe} = 0$ عند $x = 0$.

ملحوظة 1: تغير طاقة الوضع المرنة لا يتعلق بالحالة المرجعية :

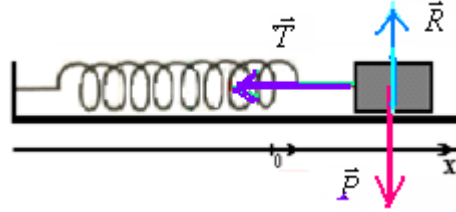
$$E_{p1} = \frac{1}{2}k.x_1 + C \quad \text{في الموضع } x_1 \text{ لدينا :}$$

$$E_{p2} = \frac{1}{2}k.x_2 + C \quad \text{في الموضع } x_2 \text{ لدينا :}$$

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1) \quad \text{وتغير طاقة الوضع :}$$

(ب) انحفاظ الطاقة الميكانيكية:

نعتبر النواس المرن الأفقي خلال حركته التذبذبية .



بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على المجموعة خلال انتقال الجسم S من الموضع x_1 إلى الموضع x_2 .

$$\Delta E_c = W\vec{P} + W\vec{R} + W\vec{T}$$

$W\vec{P} = 0$ و $W\vec{R} = 0$ لأنهما متعامدتان مع اتجاه الحركة.

$$\Delta E_c = W\vec{T} \quad \text{إذن:} \quad \Delta E_c = W\vec{T} \quad \text{ولدينا :} \quad W\vec{T}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}.K.(x_1^2 - x_2^2) = -\Delta E_{pe} \quad \text{إذن العلاقة (1) تصبح.} \quad \Delta E_c = -\Delta E_{pe}$$

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \quad \Leftrightarrow \quad E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} \quad \text{أي :}$$

$$E_{M1} = E_{M2} \quad \text{وبالتالي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتحفظ بين الموضعين 1 و 2.} \quad \text{أي :}$$

$$\text{وبما أن الطاقة الميكانيكية} \quad E_M = E_c + E_{pe} = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 \quad \text{مع :} \quad E_{pe} = 0 \quad \text{عند } x = 0$$

إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتحفظ. $E_M = C^{te}$

$$\text{إذن :} \quad \frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}.m(2.v \cdot \frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}.K.(2.x \cdot \frac{dx}{dt}) = 0$$

$$m \cdot \dot{x} \cdot \ddot{x} + k \cdot x \cdot \dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad \text{المعادلة التفاضلية للحركة، مع :} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

(ج) مخططات الطاقة:

$$\text{وبما أن حل المعادلة التفاضلية} \quad m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \quad \text{هو دالة جيبية تكتب كما يلي :} \quad x = x_m \cos(\omega_o.t + \varphi) \quad \text{مع :} \quad \omega_o = \frac{2.\pi}{T_o}$$

$$\text{فإن :} \quad E_{pe} = \frac{1}{2}K.x^2 = \frac{1}{2}.K.x_m^2 \cdot \cos^2(\omega_o.t + \varphi)$$

$$\text{و :} \quad E_c = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.x_m^2 \cdot \omega_o^2 \cdot \sin^2(\omega_o.t + \varphi)$$

$$\text{إذن :} \quad E_m = E_{pe} + E_c = \frac{1}{2}K.x_m^2 \cdot \cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \frac{1}{2}.m.x_m^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o.t + \varphi)$$

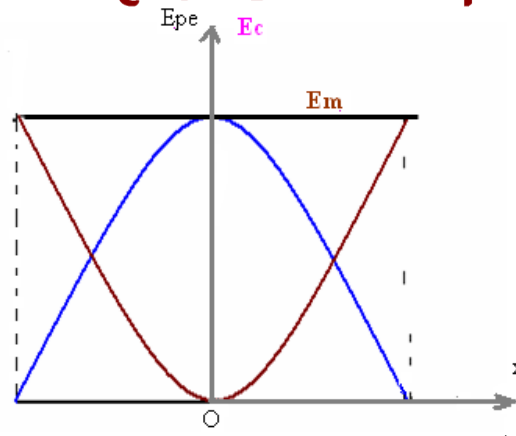
$$\omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad \text{نعوض}$$

$$E_m = \frac{1}{2}K.x_m^2 [\cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \sin^2(\omega_o.t + \varphi)] = \frac{1}{2}.K.x_m^2$$

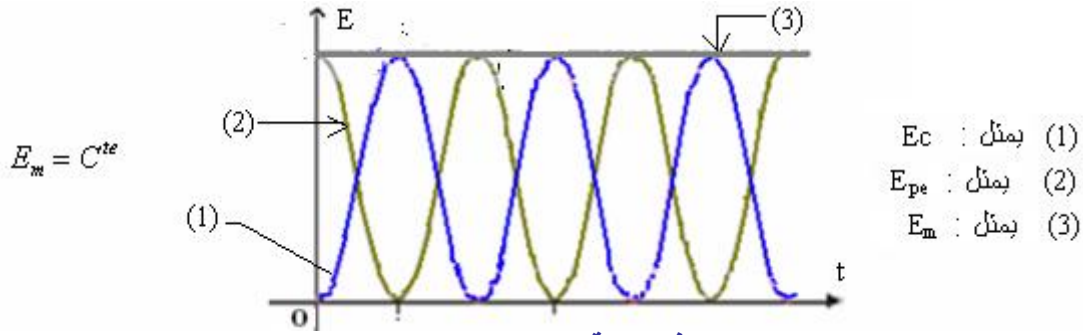
فنحصل على :

$$E_m = \frac{1}{2}.K.x_m^2 = C^{te}$$

يمكن تمثيل تغيرات E_{pe} و E_c و E_m بدلالة x .

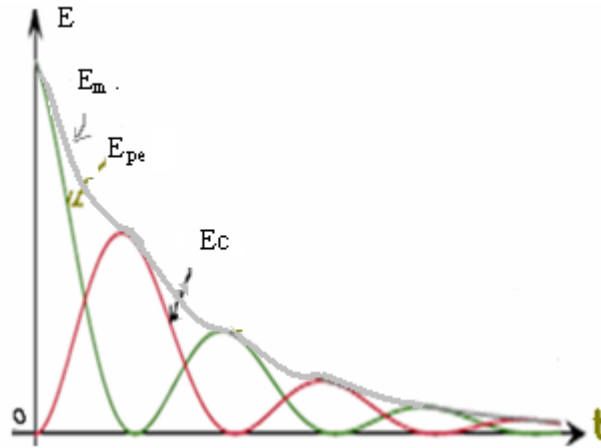


ويمكن تمثيل تغيرات E_m و E_c و E_{pe} الدالة الزمن.



(ج) في حالة وجود الاحتكاكات:

في حالة وجود الاحتكاكات يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا وبذلك الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتناقص مع مرور الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عن الحركة.



||| الدراسة الطاقية لنواس اللي :

(1) الطاقة الحركية للمجموعة:

تنحصر الطاقة الحركية لنواس اللي في الطاقة الحركية للقضيب $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$ مع J_{Δ} عزم قصور القضيب و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية

(2) طاقة الوضع للي :

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2 + C^{te} \quad \text{طاقة الوضع للي تعطىها العلاقة التالية :}$$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$$

وبالتالي:

(3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

باعتبار كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ ، يكون تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي كما يلي:

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2$$

إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تحفظ. $E_M = C^{te}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J_{\Delta} (2\dot{\theta} \frac{d\theta}{dt}) + \frac{1}{2} C (2\theta \frac{d\theta}{dt}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \text{إذن:}$$

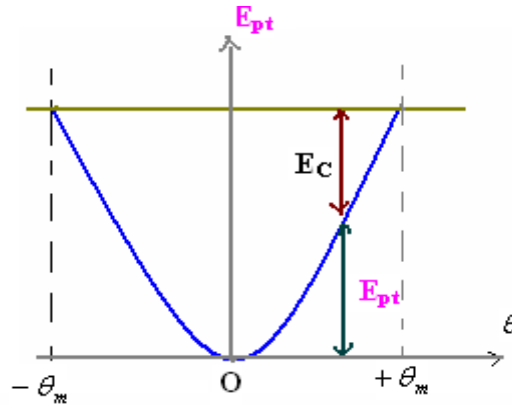
$$\omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \quad \text{المعادلة التفاضلية للحركة} \quad J_{\Delta} \ddot{\theta} + C\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + C\theta \dot{\theta} = 0$$

الحل هو كماميلي : $\theta = \theta_m \cos(\omega_o t + \varphi)$

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \quad \text{إذن الطاقة الميكانيكية :}$$

$$E_m = \frac{1}{2} C \dot{\theta}_m^2 = C^{te} \quad \text{بتعويض } \theta \text{ و } \dot{\theta} \text{ و } \omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \text{ في العلاقة أعلاه ، نحصل على :}$$

يمكن تمثيل $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$ هو عبارة عن منحنى شلجمي.



IV | الدراسة الطاقية للنواس الوازن :

(1) الطاقة الحركية للمجموعة:

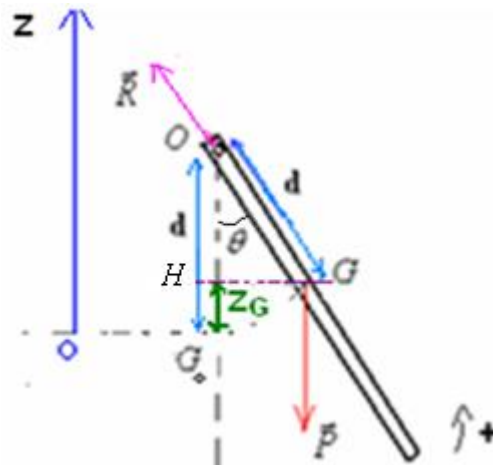
الطاقة الحركية للنواس الوازن في $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$ مع J_{Δ} عزم قصور النواس الوازن و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية

(2) طاقة الوضع الثقالية للمجموعة:

طاقة الثقالية للنواس الوازن تعطىها العلاقة التالية : $E_{pp} = m.g.z + C^{te}$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

$$E_{pp} = m.g.z \quad \text{وبالتالي:}$$



عندما يكون النواس مزاها بزاوية θ عن موضع توازنه المستقر ، تكون طاقة وضعه الثقالية : $E_{pp} = m.g.z_G$

$$z_G = d - OH = d - d \cos \theta = d(1 - \cos \theta)$$

$$E_{pp} = m.g.d(1 - \cos \theta) \quad \text{ومنه :} \quad \text{عبارة عن دالة جيبية} \quad \text{مع : } -\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$$

نشير على وجود حالتين ممكنتين :

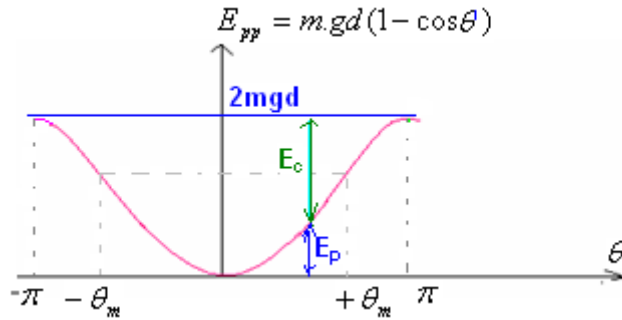
الحالة الاولى : إذا كانت $E_m > 2mgd$ الطاقة الحركية للمجموعة لا تنعدم أي النواس الوازن لا يتذبذب بل يدور باستمرار في نفس المجموعة في هذه الحالة ليست بمتذبذب ميكانيكي.

(3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة:

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

$$..... = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + mgz + C^{te}$$

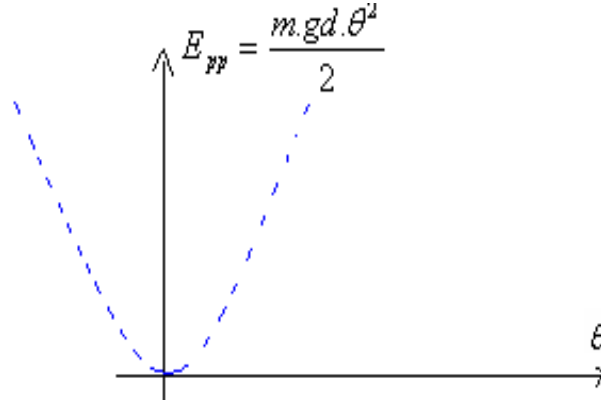
(4) مخططات الطاقة:



طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن : $E_{pp} = m.g.d(1 - \cos \theta)$

بالنسبة للتذبذبات الصغيرة حيث تكون $\theta \leq 15^\circ$ ، يمكننا أن نكتب بتقدير مقبول $1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2}$.

تصبح : $E_{pp} = \frac{m.g.d.\theta^2}{2}$. وفي هذه الحالة المنحنى الممثل لتغيرات طاقة الوضع بدلالة θ عبارة عن منحنى شلجمي.



التوجيهات :

- يذكر بتعاريف الطاقة الحركية وطاقة الوضع الثقالية والطاقة الميكانيكية ومبرهنة الطاقة الحركية وانحفاظ الطاقة الميكانيكية كتعليمات أساسية مكتسبة في المستوى الدراسي السابق.
- يعبر عن الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة مطبقة على جسم في حالة انتقال غير مستقيمي.
- يتوصل نظريا (مبيانيا وعن طريق التكامل) إلى تعبير شغل قوة خارجية مطبقة على نابض.
- يتوصل إلى تعبير طاقة الوضع المرنة $E_{pe} = \frac{1}{2} Kx^2 + cte$ وتبرز ضرورة تحديد الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة.
- يستحسن استثمار التسجيلات المنجزة أثناء دراسة المتذبذب (جسم صلب - نابض) للتوصل إلى انحفاظ طاقته في الحالة التي يكون فيها الجسم الصلب في حركة فوق مستوى أفقي.
- يتوصل إلى شغل مزدوجة اللي وطاقة الوضع للي بإتباع نفس الطريقة المعتمدة بالنسبة للمجموعة (جسم صلب - نابض).
- يتم استغلال تعبير طاقة الوضع للي وتعبير الطاقة الحركية في حالة الدوران حول محور ثابت لتحديد الطاقة الميكانيكية لنواس اللي، وينتظر في حالة انحفاظ الطاقة الميكانيكية إلى تحول الطاقة الحركية إلى طاقة الوضع والعكس.

لا تنسونا من صالح دعائكم ونسأل الله لكم العون والتوفيق.

Pour toutes vos observations contactez moi