

المظاهر الطاقية

I تذكير:

(1) شغل قوة ثابتة مطبقة على صلب في حركة إزاحة:

شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ مطبقة على جسم صلب في حركة إزاحة خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة A إلى نقطة B هو:

$$W_{\vec{F}_{A \rightarrow B}} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$$

ملحوظة: الشغل الجزئي الذي نرمز إليه بـ δW خلال انتقال جزئي $\delta \ell$ ، يعبر عنه كما يلي: $\delta W = \vec{F} \cdot \delta \ell$.

(2) مبرهنة الطاقة الحركية:

في معلم غاليلي، تغير الطاقة الحركية لجسم صلب (في حركة إزاحة أو في حركة دوران حول محور ثابت) بين لحظتين يساوي المجموع الجبري لأشغال القوى الخارجية المطبقة عليه بين هاتين اللحظتين.

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} \quad \text{مع} \quad \Delta E_c = \sum W_{\vec{F}_{ext}}$$

• الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب كتلته m وسرعته v في حركة إزاحة هي: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

• الطاقة الحركية بالنسبة لجسم صلب عزم قصوره J_A في حركة دورانية: $E_c = \frac{1}{2} J_A \cdot \omega^2$.

(3) الطاقة الميكانيكية: نسمي الطاقة الميكانيكية لمجموعة مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة.

II الدراسة الطاقية للنواس المرن:

(1) شغل القوة المقرونة بتوتر نابض:

نعتبر نابضا ذي لفات غير متصلة صلابته K ، في وضع أفقي حيث أثبت أحد طرفيه إلى حامل ثابت.

نجذب النابض أفقيا بمسافة x_m ثم نحرره. لتكن $\vec{T}$ القوة المقرونة بتوتر النابض خلال تذبذبه حول موضع التوازن.



القوة $\vec{T} = -K \cdot x \vec{i}$ قوة ارتداد، هذه القوة غير ثابتة فهي تتعلق بالأفصول x .

الشغل الجزئي للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\delta \ell = \delta x \vec{i}$ هو:

$$\delta W = \vec{T} \cdot \delta \ell = -K \cdot x \vec{i} \cdot \delta \ell = -K \cdot x \vec{i} \cdot \delta x \vec{i} = -K \cdot x \cdot \delta x$$

إذن الشغل الجزئي $\delta W = -K \cdot x \cdot \delta x$

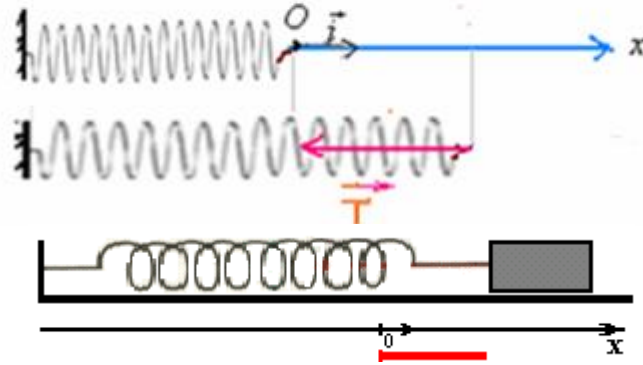
وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية، يمكننا تحديد شغل القوة $\vec{T}$ خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات الأفصول

x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 باستعمال الحساب التكاملي. بحيث لدينا: $dW = -K \cdot x \cdot dx$

II الدراسة الطاقية للنواس المرن:

(1) شغل القوة المقرونة بتوتر نابض:

نعتبر نابضا صلابته K ، في وضع أفقي حيث أثبت أحد طرفيه إلى حامل ثابت. نجذب النابض أفقيا بمسافة x ثم نحرره. لتكن $\vec{T}$ القوة المقرونة بتوتر النابض خلال تذبذبه حول موضع التوازن.



القوة $\vec{T} = -K \cdot x \vec{i}$ قوة ارتداد، هذه القوة غير ثابتة فهي تتعلق بالأفصول x .

الشغل الجزئي للقوة المطبقة من طرف النابض خلال انتقال جزئي $\delta \ell = \delta x \vec{i}$ هو:

$$\delta W = \vec{T} \cdot \delta \ell = -K \cdot x \vec{i} \cdot \delta x \vec{i} = -K \cdot x \cdot \delta x$$

إذن الشغل الجزئي: $\delta W = -K \cdot x \cdot \delta x$

وبما أن الشغل الكلي يساوي مجموع الأشغال الجزئية، يمكننا تحديد شغل القوة $\vec{T}$ خلال انتقال نقطة تأثيرها من نقطة M_1 ذات الأفصول

x_1 إلى نقطة M_2 ذات الأفصول x_2 باستعمال الحساب التكاملي. بحيث لدينا: $dW = -K \cdot x \cdot dx$

$$W_{\vec{T}_{M_1 \rightarrow M_2}} = \int_{x_1}^{x_2} -K \cdot x \cdot dx = -K \int_{x_1}^{x_2} x \cdot dx = K \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2} \cdot K (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} K (x_1^2 - x_2^2)$$

بصفة عامة:

تعبير شغل القوة المقرونة بتوتر نابض خلال الانتقال من الموضع البدني الذي أفصوله x_A إلى الموضع النهائي الذي أفصوله x_B هو كما يلي:

$$W_{\vec{T}_{A \rightarrow B}} = \frac{1}{2} \cdot K (x_A^2 - x_B^2)$$

(2) الدراسة الطاقية للنواس المرن:

أ) طاقة الوضع المرنة:

طاقة الوضع المرنة للنواس المرن هي الطاقة التي تمتلكها المجموعة من جراء تشويه النابض وتعطيها العلاقة التالية:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2 + c^{te}$$

حيث: K صلابة النابض. x : إطالته.

والثابتة c^{te} تحدد قيمتها باستعمال الحالة المرجعية.

وعملنا نختار كحالة المرجعية $E_{pe} = 0$ عندما يكون النابض غير مشوها أي عند $x = 0$.

بالتعويض في التعبير السابق نحصل على $c^{te} = 0$.

وبالتالي يعبر عن طاقة الوضع للنواس المرن بالعلاقة: $E_{pe} = \frac{1}{2} K x^2$ باعتبار $E_{pe} = 0$ عند $x = 0$.

ملحوظة 1: تغير طاقة الوضع المرنة لا يتعلق بالحالة المرجعية :

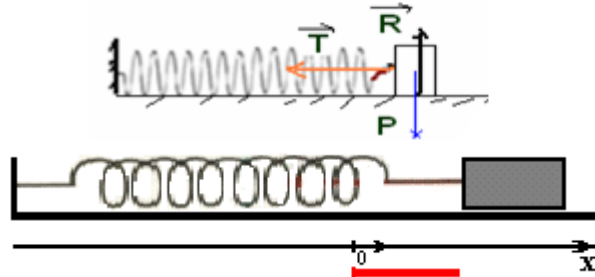
$$Ep_1 = \frac{1}{2}k.x_1 + C \quad \text{في الموضع } x_1 \text{ لدينا :}$$

$$Ep_2 = \frac{1}{2}k.x_2 + C \quad \text{في الموضع } x_2 \text{ لدينا :}$$

$$\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = \frac{1}{2}k(x_2 - x_1) \quad \text{وتغير طاقة الوضع :}$$

(ب) انحفاظ الطاقة الميكانيكية:

نعتبر النواس المرن الأفقي خلال حركته التذبذبية .



بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على المجموعة خلال انتقال الجسم S من الموضع x_1 إلى الموضع x_2 .

$$\Delta Ec = W\vec{P} + W\vec{R} + W\vec{T}$$

لأنهما متعامدتان مع اتجاه الحركة. $W\vec{P} = 0$ و $W\vec{R} = 0$

$$\Delta Ec = W\vec{T} \quad \text{ولدينا :} \quad W\vec{T}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2}.K(x_1^2 - x_2^2) = -\Delta E_{pe} \quad \text{إذن العلاقة (1) تصبح.} \quad \Delta Ec = -\Delta E_{pe}$$

$$E_{c1} + E_{p1} = E_{c2} + E_{p2} \quad \Leftrightarrow E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} \quad \text{أي :}$$

$$E_{M1} = E_{M2} \quad \text{وبالتالي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتحفظ بين الموضعين 1 و 2.}$$

$$\text{وبما أن الطاقة الميكانيكية} \quad E_M = Ec + Epe = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.k.x^2 \quad \text{مع :} \quad Epe = 0 \quad \text{عند } x = 0$$

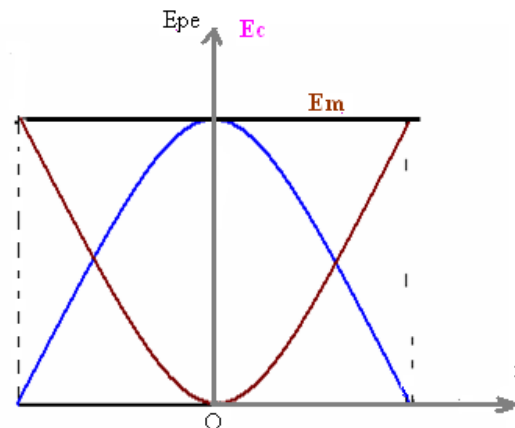
إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتحفظ. $E_M = C^{te}$

$$\text{إذن :} \quad \frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.K.x^2 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}.m(2.v \cdot \frac{dv}{dt}) + \frac{1}{2}.K.(2.x \cdot \frac{dx}{dt}) = 0$$

$$m.\dot{x}.\ddot{x} + k.x.\dot{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m.\ddot{x} + k.x = 0 \quad \text{المعادلة التفاضلية للحركة، مع :} \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}$$

(ج) مخططات الطاقة:

يمكن تمثيل تغيرات E_{pe} و E_c و E_M بدلالة x .



وبما أن حل المعادلة التفاضلية $m.\ddot{x} + k.x = 0$ هو دالة جيبية تكتب كما يلي : $x = x_m \cos(\omega_0.t + \varphi)$

$$\text{فإن :} \quad E_{pe} = \frac{1}{2}.K.x^2 = \frac{1}{2}.K.x_m^2 \cos^2(\omega_0.t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m.v^2 = \frac{1}{2} m.x_m^2 . \omega_o^2 . \sin^2(\omega_o.t + \varphi) \quad \text{و:}$$

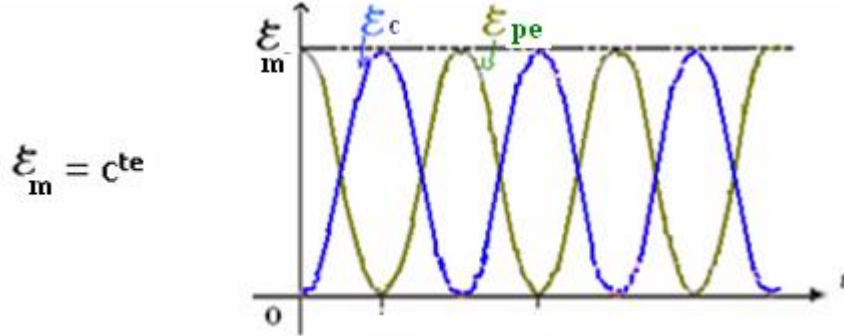
$$E_m = E_{pt} + E_c = \frac{1}{2} K.x_m^2 . \cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \frac{1}{2} m.x_m^2 \omega_o^2 \sin^2(\omega_o.t + \varphi) \quad \text{إذن:}$$

$$\omega_o^2 = \frac{K}{m} \quad \text{نعوض}$$

$$E_m = \frac{1}{2} K.x_m^2 [\cos^2(\omega_o.t + \varphi) + \sin^2(\omega_o.t + \varphi)] = \frac{1}{2} K.x_m^2$$

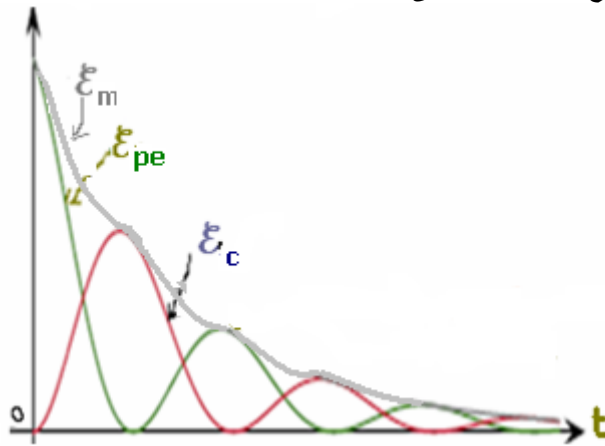
فنحصل على :

$$E_m = \frac{1}{2} K.x_m^2 = C^{te}$$



ج) في حالة وجود الاحتكاكات:

في هذه الحالة يتناقص وسع التذبذبات تدريجيا ، فنحصل على نظام شبه دوري (أو لا دوري وذلك حسب أهمية الاحتكاك). الطاقة الميكانيكية للمجموعة تتناقص مع مرور الزمن إلى أن يتوقف المتذبذب عن الحركة.



||| الدراسة الطاقية لنواس اللي :

1) الطاقة الحركية للمجموعة:

تنحصر الطاقة الحركية لنواس اللي في الطاقة الحركية للقضيب $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} . \dot{\theta}^2$ مع J_{Δ} عزم قصور القضيب و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية

2) طاقة الوضع للي :

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C . \theta^2 + C^{te} \quad \text{طاقة الوضع للي تعطىها العلاقة التالية :}$$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

$$E_{pt} = \frac{1}{2} C . \theta^2$$

وبالتالي:

3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة :

باعتبار كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ ، يكون تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي كما يلي:

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} . \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C . \theta^2$$

إذا كانت الاحتكاكات مهملة ، ليس هناك تبدد للطاقة أي الطاقة الميكانيكية للمجموعة تحفظ. $E_M = C^{te}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J_{\Delta} (2 \dot{\theta} \frac{d\theta}{dt}) + \frac{1}{2} C (2 \theta \frac{d\theta}{dt}) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2) = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_M}{dt} = 0 \quad \text{إذن:}$$

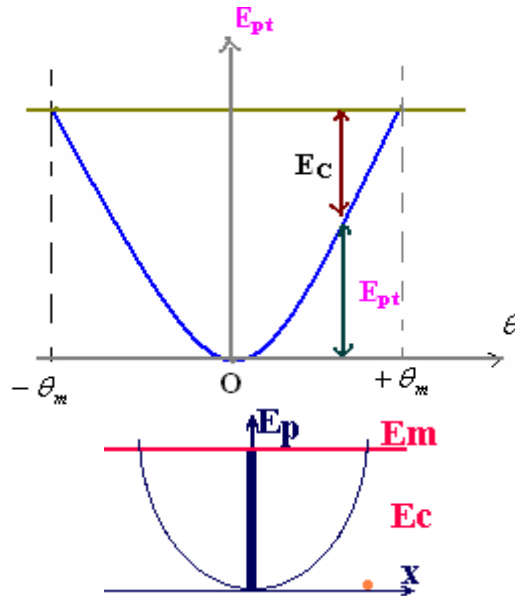
$$\omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \quad \text{المعادلة التفاضلية للحركة} \quad J_{\Delta} \ddot{\theta} + C \theta = 0 \Leftrightarrow J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta} + C \theta \dot{\theta} = 0$$

الحل هو كماملي : $\theta = \theta_m \cos(\omega_o t + \varphi)$

$$E_m = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 \quad \text{إذن الطاقة الميكانيكية :}$$

$$E_m = \frac{1}{2} C \theta_m^2 = C^{te} \quad \text{بتعويض } \theta \text{ و } \dot{\theta} \text{ و } \omega_o^2 = \frac{C}{J_{\Delta}} \text{ في العلاقة أعلاه ، نحصل على :}$$

يمكن تمثيل $E_{pt} = \frac{1}{2} C \theta^2$ هو عبارة عن منحنى شلجمي.



IV الدراسة الطاقية للنواس الوازن : خاص بمسلكي العلوم الرياضية والفيزيائية



النواس الوازن: هو كل جسم صلب غير قابل للتشويه يمكنه إنجاز حركة تذبذبية حول محور ثابت لا يمر بمركز قصوره.



(1) الطاقة الحركية للمجموعة:

الطاقة الحركية للنواس الوازن في $E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$ مع J_{Δ} عزم قصور النواس الوازن و $\dot{\theta}$ سرعته الزاوية

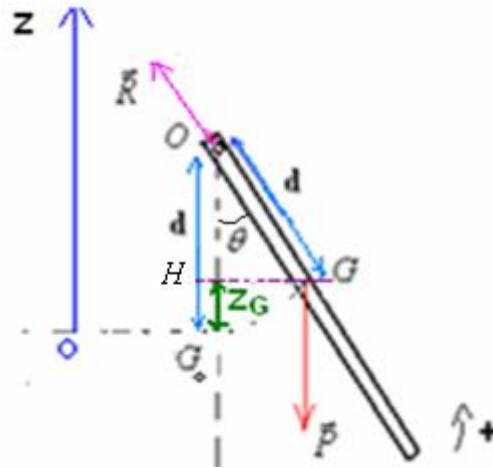
(2) طاقة الوضع الثقالية للمجموعة: خاص بمسلكي العلوم الرياضية والفيزيائية

طاقة الثقالية للنواس الوازن تعطىها العلاقة التالية : $E_{pp} = m.gz + C^{te}$

عادة نأخذ كحالة مرجعية $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ وبذلك تكون $C^{te} = 0$.

$$E_{pp} = m.gz$$

وبالتالي:



عندما يكون النواس مُزاحا بزاوية θ عن موضع توازنه المستقر ، تكون طاقة وضعه الثقالية : $E_{pp} = m.gz_G$

$$z_G = d - OH = d - d \cos \theta = d(1 - \cos \theta)$$

ومنه : $E_{pp} = m.gd(1 - \cos \theta)$ عبارة عن دالة جيبية مع : $-\theta_m \leq \theta \leq +\theta_m$

نشير على وجود حالتين ممكنتين :

الحالة الاولى : إذا كانت $E_m > 2mgd$ الطاقة الحركية للمجموعة لا تنعدم أي النواس الوازن لا يتذبذب بل يدور باستمرار في نفس . المجموعة في هذه الحالة ليست بمتذبذب ميكانيكي.

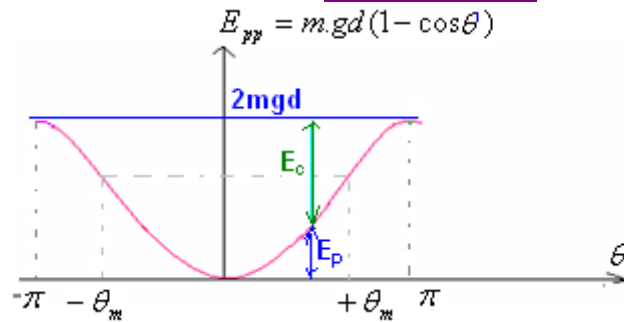
الحالة الثانية : إذا كانت $E_m < 2mgd$ تنعدم الطاقة الحركية للنواس عند $\theta = \pm\theta_m$ وبذلك يتذبذب بشكل دوري.

(3) الطاقة الميكانيكية للمجموعة: خاص بمسلكي العلوم الرياضية والفيزيائية

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

$$..... = \frac{1}{2} J_{\Delta} . \dot{\theta}^2 + mgz + C^{te}$$

(4) مخططات الطاقة:



طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن : $E_{pp} = m.gd(1 - \cos \theta)$

بالنسبة للتذبذبات الصغيرة حيث تكون $\theta \leq 15^\circ$ ، يمكننا أن نكتب بتقدير مقبول $1 - \cos \theta = \frac{\theta^2}{2}$

تصبح : $E_{pp} = \frac{m.gd.\theta^2}{2}$. وفي هذه الحالة المنحنى الممثل لتغيرات طاقة الوضع بدلالة θ عبارة عن منحنى شلجمي.

