

المظاهر الطاقية

I - شغل قوة

1 - شغل قوة ثابتة (تذكير)

نعتبر عن شغل قوة ثابتة $\vec{F}$ عند انتقال نقطة تأثيرها من A إلى نقطة B بالعلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos \alpha$$

بحيث أن α الزاوية بين $\vec{F}$ و $\overrightarrow{AB}$

AB المسافة الفاصلة بين النقطة A و النقطة B تسمى بالانتقال ونعبر عنها بالمتر (m)
شدة القوة ب (N)

$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$ شغل القوة $\vec{F}$ ونعبر عنه بالجول (J)

* لا يتعلق شغل قوة ثابتة بالمسار المتبع من طرف نقطة التأثير

2 - الشغل الجزئي لقوة غير ثابتة

نعتبر قوة $\vec{F}$ غير ثابتة ونقطة تأثيرها تنتقل من A إلى B .

لحساب شغل غير ثابتة نجزء المسار إلى مسارات جزئية $\delta \vec{\ell}$ متناهية في الصغر تسمح باعتبار $\vec{F}$ ثابتة في كل منها .

تعبير الشغل الجزئي للقوة $\vec{F}$ خلال الانتقال الجزئي $\delta \vec{\ell}$ هو : $\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$

الشغل الكلي للقوة المتغيرة $\vec{F}$ هو مجموع الأشغال الجزئية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \sum_A^B \delta W(\vec{F}) = \sum_A^B \vec{F} \cdot \delta \vec{\ell}$$

3 - شغل القوة الخارجية المطبقة من طرف نابض

نعتبر نابضا R ذا لفات غير متصلة صلابته k وكتلته مهملة ، في وضع أفقي على مستوى أفقي .
نثبت أحد طرفيه بحامل ثابت .

نطبق على النابض عند طرفه الحر M قوة $\vec{F}'$ ،
فيطال النابض بحيث تنتقل النقطة M بالمقدار

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i}$$

تمثل النقطة O موضع M في الحالة البدئية للنابض .

حسب القانون الثالث لنيوتن ، قانون التأثيرات

المتبادلة ، فإن النابض يطبق قوة $\vec{F}$ على المجرب

وهي قوة ارتداد $\vec{F} = -\vec{F}'$ بحيث أن $\vec{F} = -kx \vec{i}$ أي

أن $\vec{F}' = kx \vec{i}$ أي أن $\vec{F}'$ تتعلق بالأفصول x إذن

فهي غير ثابتة .

تعبير شغل القوة $\vec{F}'$ عندما ينتقل طرف النابض من A إلى B

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \sum_A^B \delta W(\vec{F}') = \sum_A^B \vec{F}' \cdot \delta \vec{\ell} = \sum_A^B kx \vec{i} \cdot \delta x \vec{i}$$

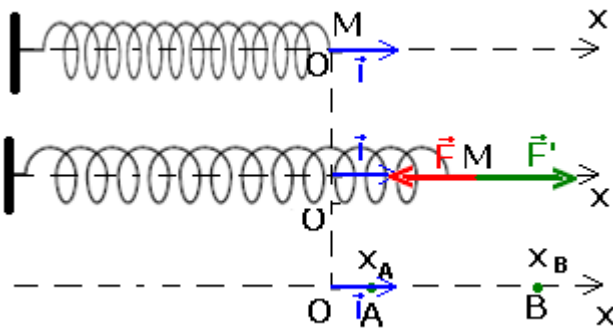
يمكن استعمال طريقتين لتحديد هذا المجموع :

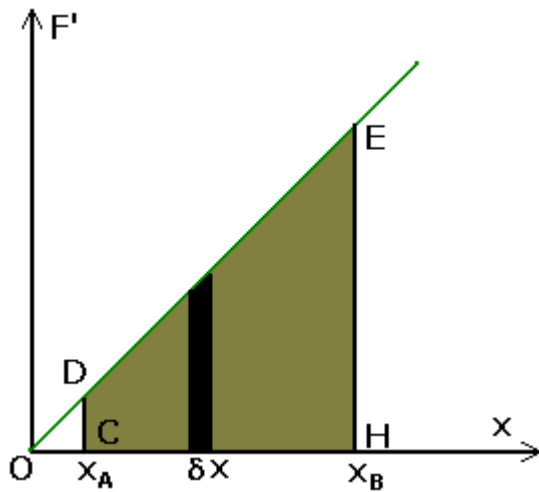
أ - الطريقة المباشرة :

في أنظمة محورين تمثل تغيرات F بدلالة الأفصول x وهي إطالة النابض . $F = kx$ أي أنها دالة خطية تمر من أصل النظام .

يوافق الشغل الجزئي $\delta W(\vec{F}') = k \cdot x \cdot \delta x$ مساحة المستطيل الجزئي بالأسود المبين في الشكل

جانبه .





عند انتقال النقطة M من A أفصولها x_A إلى B أفصولها x_B ،

فإن الشغل الكلي للقوة $\vec{F}'$ يوافقه مجموع مساحات المستطيلات الجزئية ويساوي مساحة شبه المنحرف CDEF

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = a_{CDEF} = a_{OEH} - a_{OCD}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

ب - الطريقة التحليلية

نعوض في العلاقة السابقة المجموع $\sum$ بالتكامل $\int$ ولانتقال الجزئي $\delta \ell$ ب المقدار التفاضلي dx فنحصل على العلاقة التالية :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \int_{x_A}^{x_B} kx dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_{x_A}^{x_B}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$$

خلاصة :

تعبير شغل قوة المطبقة من طرف مجرب على الطرف الحر ل نابض يجعله ينتقل من موضع A إلى موضع

B أفصولهما على التوالي x_A و x_B هو : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = \frac{1}{2} kx_B^2 - \frac{1}{2} kx_A^2$.

وبما أن $\vec{F} = -\vec{F}'$ فإن شغل قوة الارتداد المطبقة من طرف النابض هو : $W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$

يتعلق شغل قوة الارتداد $\vec{F}$ بالموضع البدئي والموضع النهائي لمركز قصور الجسم .

II - طاقة الوضع المرنة

عندما يكون النابض مضغوطا أو مطالا فإنه يخزن طاقة ترتبط بحالة تشوّهه تسمى طاقة الوضع المرنة .

عندما يطبق المجرب قوة $\vec{F}'$ على الطرف الحر للنابض لجعل نقطة تأثيره تنتقل من النقطة A أفصولها x_A في حالة سكون إلى النقطة B أفصولها x_B حيث توجد كذلك في حالة سكون ، فإنه حسب مبرهنة الطاقة الحركية لدينا :

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{F}') = 0 \Rightarrow W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = - W_{A \rightarrow B}(\vec{F}')$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

أي أن الشغل المطبق من طرف المجرب على طرف النابض يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { المجرب ، النابض } وهي طاقة وضع مرنة .

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = E_{pe}(A) - E_{pe}(B)$$

نعرف طاقة الوضع المرنة لمجموعة مكونة من { جسم - نابض } في وضع أفقي هي الطاقة التي

تخزنه هذه المجموعة من جراء تشويه الجسم وتعبيرها هو : $E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 + C$.

C ثابتة تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية لطاقة الوضع المرنة .

وبصفة عامة نختار طاقة الوضع المرنة منعقدة في الموضع الموافق للأفصول $x=0$ حيث $(C=0)$ فيكون تعبير طاقة الوضع المرنة هو : $E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$ وحدتها في النظام العالمي للوحدات هي الجول . و x إطالة النابض و k صلابته .

$$\text{ملحوظة : } {}^B_A\Delta E_{pe} = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

III - الدراسة الطاقية للمجموعة { جسم صلب ، نابض } في وضع أفقي .

1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

يتوفر الجسم الصلب غير قابل للتشويه كتلته m وسرعته v في إزاحة بالنسبة لمرجع معين ، على طاقة حركية E_C بحيث $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ وحدة E_C في النظام العالمي للوحدات هي الجول .

بما أن الجسم في حركة إزاحة ، فإن سرعة الجسم الصلب هي سرعة مركز قصوره بالنسبة لمتذبذب مرن ، الطاقة الحركية لهذا المتذبذب هي الطاقة الحركية للجسم الصلب

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \text{بحيث أن } x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

2 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعريف بالطاقة الميكانيكية :

في مرجع معين الطاقة الميكانيكية لمجموعة ما في لحظة t هي مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع لهذه المجموعة .

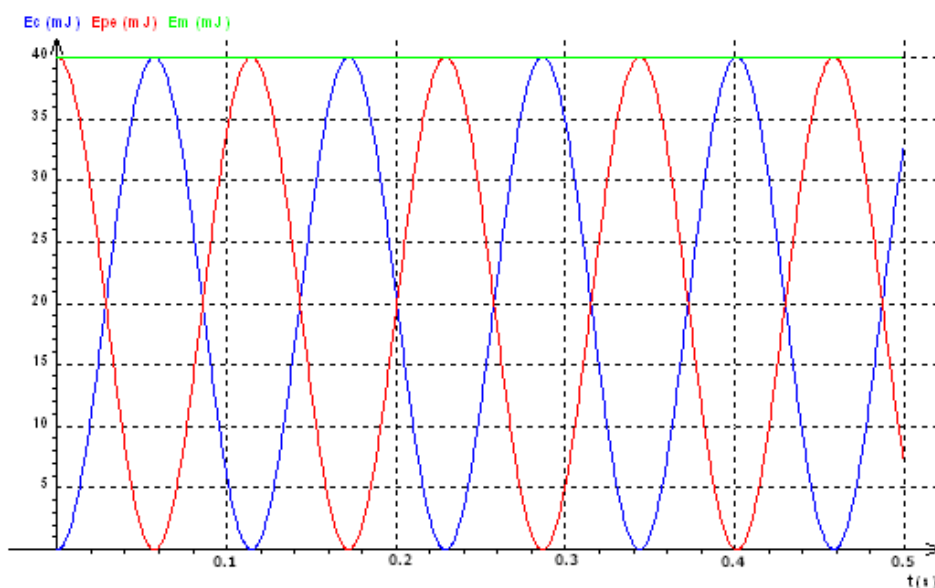
طاقة الوضع لمتذبذب مرن أفقي هي مجموع طاقة وضعه الثقالية وطاقة وضعه المرنة $E_p = E_{pp} + E_{pe}$

نختار الحالة المرجعية لطاقة الوضع الثقالية منطبقة مع المستوى الأفقي المار من G مركز قصور المتذبذب ($E_{pp} = 0$) نحصل على $E_p = E_{pe}$ أي أن تعبير الطاقة الميكانيكية لمجموعة مكونة من جسم

$$\text{صلب ونابض أفقي هو : } E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + C$$

باختيار حالة مرجعية لطاقة الوضع المرنة وهي : $E_{pe} = 0$ عند التوازن أي أن $x=0$ نحصل على التعبير

$$\text{التالي : } E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$



أ - حالة إهمال الاحتكاكات

في هذه الحالة يبقى وسع التذبذبات x_m ثابتا ، فنحصل على نظام دوري دوره الخاص T_0 ، فيكون

عندنا انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة . $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ مهما كانت قيم x و v

– عندما تأخذ الاستطالة قيمتها القصوى x_m فإن الطاقة الميكانيكية $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2$

– عنما تكون الاستطالة منعدمة $x=0$ فإن $E_m = \frac{1}{2}mv_m^2$ وبالتالي فإن $E_m = \frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_m^2$ ومنه

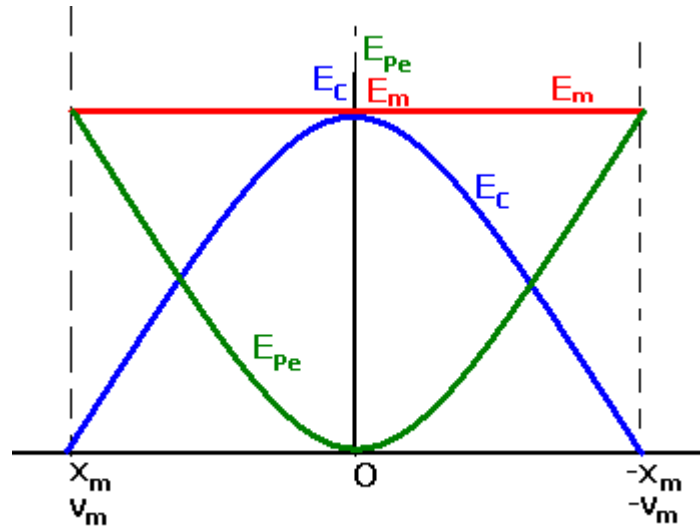
$$v_m = x_m \sqrt{\frac{k}{m}}$$

كذلك يمكن أن نحصل على المعادلة التفاضلية للمتذبذب انطلاقا من الطاقة الميكانيكية أي بعملية اشتقاقها بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

مخططات الطاقة للنواس المرن الأفقي :

تمثيل على نفس النظمة E_{pe} و E_C و E_m



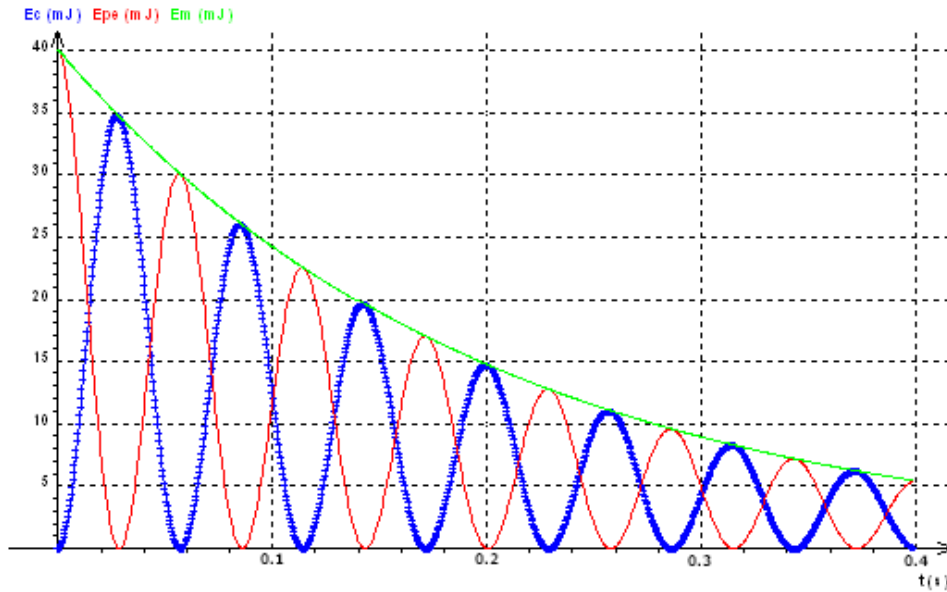
خلاصة : في غياب الاحتكاكات تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس مرن أفقي وحر .

ب - حالة احتكاكات غير مهمة .

في هذه الحالة يتناقص وسع الذبذبات تدريجيا مع الزمن t ، فنحصل على نظام شبه دوري أو لا دوري في حالة احتكاكات مهمة .

يعزى تناقص الطاقة الميكانيكية للمجموعة مع الزمن t إلى الانتقال الحراري (وجود الاحتكاكات)

شكل منحنى تغيرات E_m و E_C و E_{pe} بدلالة الزمن :



IV - الدراسة الطاقية لنواس اللي .

1 - الطاقة الحركية للمجموعة .

المجموعة المتذبذبة هي { القضيب - السلك }
بما أن السلك كتلته مهملة فإن الطاقة الحركية لنواس اللي تنحصر في الطاقة الحركية للقضيب ، وبما أنه في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) سيكون تعبير الطاقة الحركية على الشكل التالي :

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 \quad \text{حيث } J_{\Delta} \text{ عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور } (\Delta) \text{ المجسد من طرف السلك و } \dot{\theta} \text{ السرعة الزاوية لدوران القضيب .}$$

2 - طاقة الوضع للي المجموعة .

نعتبر نواس لي ثابتة ليه C في حركة تذبذبية حول محور (Δ) يجسده السلك ، عزم قصور القضيب بالنسبة للمحور (Δ) هو J_{Δ} . نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على هذه المجموعة بين موضعين أفصولهما الزاوي تباعا : θ_1 و θ_2 .

جهد القوى المطبقة على القضيب أثناء حركته : $\vec{P}$ وزن القضيب وتأثير السلك على القضيب $\vec{R}$ وإلى مزدوجة اللي عزمها $\mathcal{M}_C = -C.\theta$ ،

نطبق المبرهنة : $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_1^2 = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W_C$ بما أن خط تأثير القوتين $\vec{P}$ و $\vec{R}$ يتقاطعان

$$\text{مع المحور } (\Delta) \text{ فإن شغلها منعدم أي أن } \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}_1^2 = W_C$$

نعلم أن المعادلة الزمنية لحركة المجموعة المتذبذبة هي على الشكل التالي : $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$

نأخذ $\varphi = 0$ لتبسيط العمليات الحسابية .

$$\theta_1 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \theta_2 = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right) \text{ أي أن } \dot{\theta}_1 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_1\right) \text{ و } \dot{\theta}_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right)$$

$$W_C = \frac{1}{2} C \theta_1^2 - \frac{1}{2} C \theta_2^2 \quad (1) \text{ العلاقة في التعابير هذه وبتعويض } \theta_2 = -\theta_m \frac{2\pi}{T_0} \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t_2\right)$$

هذه العلاقة تمثل شغل مزدوجة اللي عندما يتغير الأفضول الزاوي من θ_1 إلى θ_2 . أي أن شغل مزدوجة اللي يساوي تغير شكل من أشكال الطاقة للمجموعة { القضيب - السلك } وهي طاقة الوضع للي . $W_C = E_{pt}(1) - E_{pt}(2)$ بحيث أن $E_{pt}(1) = \frac{1}{2}C\theta_1^2$ و $E_{pt}(2) = \frac{1}{2}C\theta_2^2$ وبالتالي نعرف طاقة الوضع

للي بالمقدار التالي : $E_{pt} = \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$ ، ثابتة تتعلق بالحالة المرجعية وتحدده الشروط البدئية

3 - الطاقة الميكانيكية للمجموعة .

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس اللي هو : $E_m = \frac{1}{2}J_\Delta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + Cte$.

أ - في حالة احتكاكات مهملة .

نعتبر أن التذبذبات الأولى لنواس لي حر غير مخمدة معادلته التفاضلية $J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta = 0$. انطلاقا من تعبير الطاقة الميكانيكية يمكن أن نبين أن هناك انحفاظ الطاقة الميكانيكية للمجموعة وذلك باشتقاق تعبير E_m بالنسبة للزمن :

$$\frac{dE_m}{dt} = J_\Delta \ddot{\theta} \dot{\theta} + C\dot{\theta}\theta = \dot{\theta}(J_\Delta \ddot{\theta} + C\theta) = 0 \Rightarrow E_m = cte$$

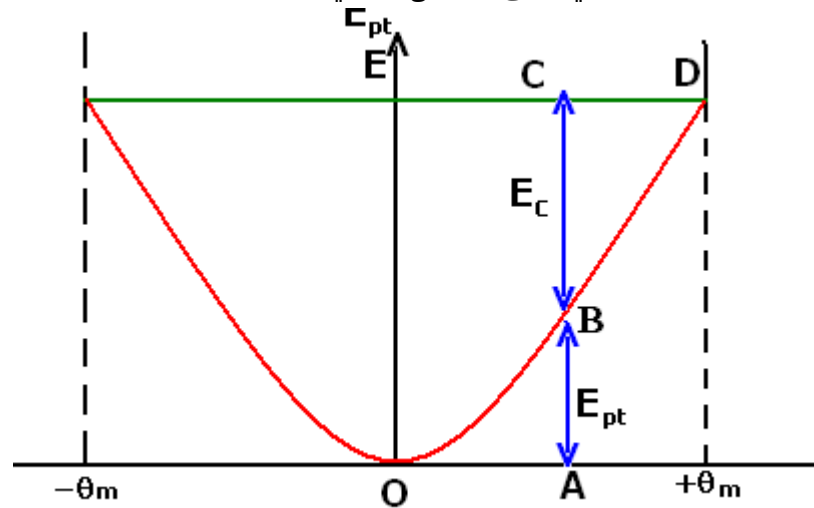
أي أن الطاقة الميكانيكية تنحفظ .

ويمكن أن نبين كذلك انطلاقا من المعادلة الزمنية $\theta = \theta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$ أن هذه الثابتة هي :

$$E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$$

خلاصة : تنحفظ الطاقة الميكانيكية لنواس لي حر وغير مخمد : $E_m = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = cte$

مخططات الطاقة هي على الشكل التالي :



من خلال مخططات الطاقة يتبين أنه خلال الذبذبات الحرة غي المخمدة لنواس لي تتحول الطاقة الحركية إلى طاقة وضع والعكس صحيح .

ب - في حالة وجود الاحتكاك

تتناقص الطاقة الميكانيكية للنواس اللي بحيث تتحول إلى طاقة حرارية .

V - الدراسة الطاقية للنواس الوزن

نعتبر المجموعة النواس الوزن {الحامل - الجسم S} بحيث أن J_{Δ} عزم قصور الجسم S ونمعلم حركة مركز قصوره بالأفصول الزاوي θ عند كل لحظة t بالنسبة لمعلم مرتبط بمرجع أرضي .

– الطاقة الحركية للمجموعة : يتوفر النواس الوزن على طاقة حركية في المرجع المرتبط بالأرض :

$$E_C = \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

– طاقة الوضع الثقالية للمجموعة

تعبير طاقة الوضع الثقالية لنواس وازن في مجال الثقالة هو :

$$E_{pp} = mgz + cte$$

مركز قصوره في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ متعامد وممنظم

محوره $(O, \vec{k})$ رأسي وموجه نحو الأعلى ، و g شدة الثقالة .

الثابتة cte تحدد انطلاقا من الحالة المرجعية .

– الطاقة الميكانيكية للنواس الوزن.

$$E_m = E_C + E_{pp}$$

تعبير الطاقة الميكانيكية لنواس وازن في معلم مرتبط بمرجع أرضي هو :

$$E_m = mgz + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 + cte$$

مثال :

حسب الشكل : $z = z_0 + h$ بحيث أن

$$O'G = d \quad \text{نضع} \quad h = O'G - O'G \cos \theta$$

$$z = z_0 + d(1 - \cos \theta)$$

يمكن تحديد الثابتة cte انطلاقا من الحالة المرجعية :

$$E_{pp} = 0 \quad \text{عند} \quad z = z_0 \quad \text{أي أن} \quad cte = -mgz_0$$

$$.. E_m = mgd(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mg\dot{\theta} \sin \theta + J_{\Delta} \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

$$= \dot{\theta} (mgd \sin \theta + J_{\Delta} \ddot{\theta}) = 0$$

$$E_m = cte$$

في غياب للاحتكاكات تبقى الطاقة الميكانيكية للنواس

الوازن في مجال الثقالة ثابتة . **إذن النواس الوزن**

مجموعة محافظته

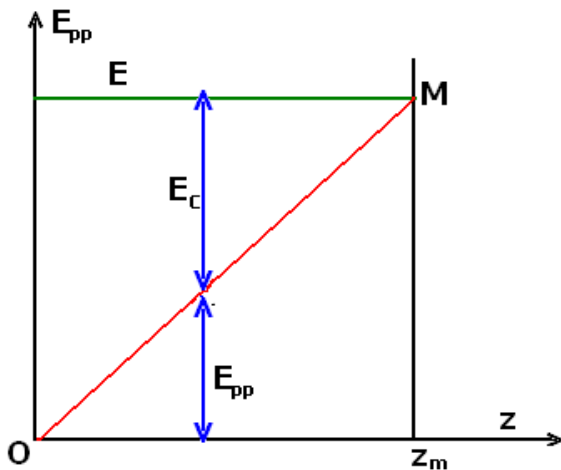
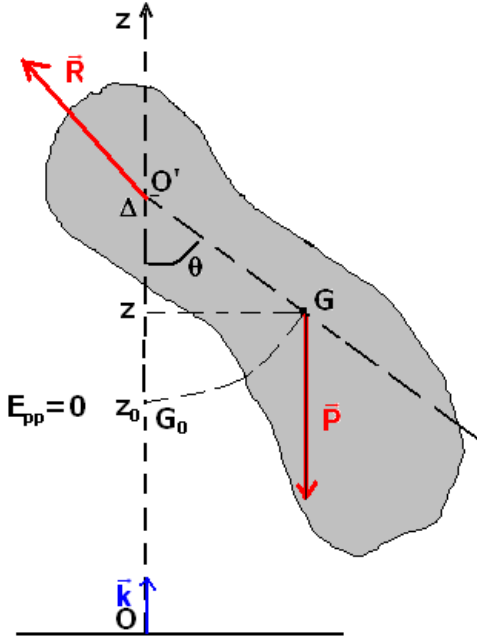
– مخططات الطاقة

أ – الحالة العامة

* التمثيل المبياني لتغيرات طاقة الوضع الثقالية بدلالة الأنسوب z .

$$E_{pp} = mgz$$

$$E_m = g(z) = cte$$



$$E_m - E_{pp} = E_c$$

الطاقة الحركية إما موجبة أو منعدمة.

في النقطة M $E_c = 0$ و $E_{pp} = mgz_M$

$$E_m = E_{pp} = mgz_M$$

أي أن z لا يمكنها أن تتجاوز z_M يعني أن $z < z_M$

في النقطة O : $E_{pp} = 0$ و $E_c = E_m = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

عندما تزداد z تنقص الطاقة الحركية E_c تزداد طاقة الوضع E_{pp} إلى أن تصبح $z = z_m$ فيتوقف الجسم

أي أن $E_c = 0$

ب - حالة النواس الوازن

طاقة الوضع الثقالية للنواس الوازن نختار كحالة مرجعية $E_{pp} = 0$ بالنسبة $z = z_0$ في هذه الحالة

$$E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta)$$

مخططات الطاقة

الطاقة الميكانيكية وهي ثابتة بالنسبة للنواس الوازن $E_m = E_{pp} + E_c$

$$E_{pp} = f(\theta) \text{ طاقة الوضع الثقالية } E_{pp} = mgd(1 - \cos \theta)$$

حساب تغيرات $E_{pp}(\theta)$

$$\frac{dE}{d\theta} = mgd \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0$$

$$\theta = \pi \text{ أو } \theta = -\pi$$

$$-\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$0 \leq E_{pp} \leq 2mgd$$

الحالة الأولى:

$E_m > 2mgd$ و $E_m = E_{pp} + E_c$ أي أن $E_c > 0$

وبالتالي فالنواس الوازن لا يتوقف ويمكنه ان يدور حول المحور (Δ)

الحالة الثانية :

$E_m < 2mgd$ أي أن $E_c = E_m - E_{pp}$ وبما أن $E_c \geq 0$ في هذه الحالة تنعدم الطاقة الحركية للنواس

الوازن بالنسبة لقيمتين θ_m و $-\theta_m$ في هذه الحالة

للمجموعة حركة تذبذبية حرة وغير مغمدة تتحول خلالها

الطاقة الحركية إلى طاقة وضع ثقالية $\Delta E_c = -\Delta E_{pp}$.

في حالة ذبذبات ذات وسع صغير $\sin \theta \approx \theta$ و $\sin \theta \approx \theta$

$$\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$E_p = mgd \left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} \right) = mgd \frac{\theta^2}{2}$$

