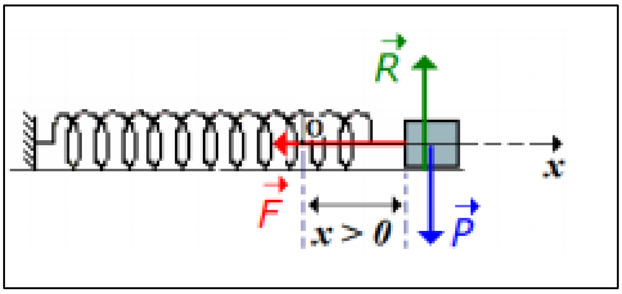
تصحيح تمارين التذبذبات الميكانيكية

تصحيح تمرين 1:



1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :

القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :

-وزن الجسم : $\vec{P}$.

-تأثير النابض : $\vec{F}$.

-تأثير السطح الأفقي : $\vec{R}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب:

$$\vec{F}+\vec{P}+\vec{R}=m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F+0+0=ma_x$$

$-Kx=m\ddot{x} \Leftarrow \ddot{x}+\frac{K}{m}x=0$ المعادلة التفاضلية للحركة

2-1-إثبات الدور الخاص T_0:

لدينا : $x(t)=X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)\Big)$

$$\dot{x}=-\frac{2\pi}{T_0}X_m\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right) \Rightarrow \ddot{x}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

نعوض x و $\ddot{x}$ في المعادلة التفاضلية :

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m\,cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)+\frac{K}{m}X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)\right)=0$$

$$X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi)\right)\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{K}{m}\right]=0$$

$$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{K}{m}=0\;\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{K}{m}} \Leftarrow$$

نستنتج : $T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ ت.ع: ت.ع: $T_0=2\pi\sqrt{\frac{025}{10}}=0,99s\approx 1s$

2-2-المعادلة الزمنية للحركة :

حسب الشروط البدئية:

عند t=0 لدينا : $x=0$ و $\dot{x}>0$

$x(0) = X_m cos\varphi = 0$ أي: $\varphi = \frac{\pi}{2}$ أو $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

$$\dot{x}(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi}{T_0}X_m > 0$$

وبالتالي : $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$x(t) = 2.10^{-2}cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3-تعبير السرعة عند اللحظة t:

$$\dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) \Rightarrow \dot{x}(t) = -0,126\, sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

4- تعبير قوة الإرتداد هو :

$$\vec{F} = -kx\vec{i}$$

-عند موضع التوازن x=0 تكون F=0 .

-عند ما تكون $x = X_m$ يكون للقوة $\vec{F}$ والمتجهة $\vec{i}$ منحيان متعاكسان ونفس الإتجاه .

شدة القوة: $F = Kx_m = 10 \times 0,02 = 0.2N$

-عند ما تكون $x = -X_m$ يكون للقوة $\vec{F}$ و $\vec{i}$ نفس الاتجاه ومنحيان متعاكسان .

شدة القوة : $F = 0,2\ N$

تصحيح التمرين 2:

1-أيجاد تعبير إطالة $\Delta\ell$ عند التوازن :

المجموعة المدروسة : $\{$الجسم $S\}$

جرد القوى :

يخضع الجسم S عند التوازن للقوى التالية :

$\vec{P}$: وزن الجسم .

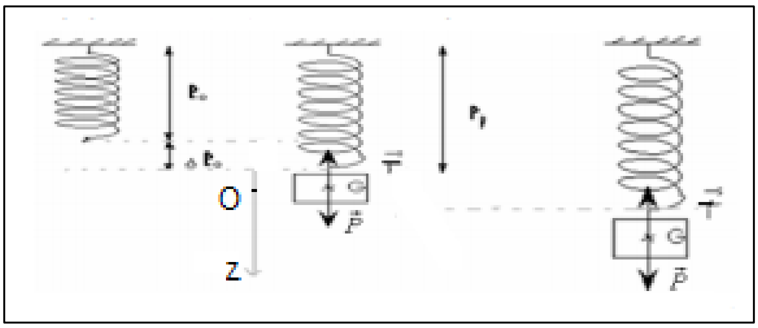
$\vec{T_0}$: توتر النابض .

حسب شرط التوازن لدينا : $T_0 = P$

$$K\Delta\ell = mg$$

إطالة النابض عند التوازن هي :

$$\Delta\ell = \frac{mg}{k} = \frac{0,2 \times 10}{20} = 0,1m$$



1-2-المعادلة التفاضلية للحركة:

أثناء الحركة يخضع الجسم S للقوى التالية :

$\vec{P}$: وزن الجسم .

$\vec{T}$: توتر النابض .

القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Oz:

$$P-T=ma_z$$
$$mg-K(\Delta\ell+z)=m\ddot{z}$$
$$mg-K\Delta\ell-Kz=m\ddot{z}$$

حسب شرط التوازن :

$$K\Delta\ell=mg$$

نكتب: $-Kz=m\ddot{z}$

$$\ddot{z}+\frac{K}{m}z=0$$

المعادلة التفاضلية لحركة النواس المرن الرأسي خطية وبالتالي حلها جيبي ومنه الحركة تذبذبية جيبية.

2-2-المعادلة الزمنية للحركة :

حل المعادلة الزمنية يكتب :

$$z(t)=Z_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

حسب الشروط البدئيةلدينا عند $t=0$: $z(0)=Z_m=4cm$

المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(0)=Z_m cos(\varphi)=Z_m$$

$$\varphi=0 \Leftarrow cos\varphi=1$$

لدينا :

$$\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{40}{0,1}}=20\,rad.s^{-1}$$

المعادلة التفاضلية تكتب:

$$z(t)=4.10^{-2}cos(20t)$$

3-2-نبين تعبير السرعة:

لنحسب تعبير السرعة :

$$\dot{z}=\frac{dz}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}z_m\,sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$$

عندما يمر الجسم من موضع التوازن لأول مرة في المنحى السالب تكون سرعته سالبة وبالتالي نكتب:

$sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)=1$ كما أن : $\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\dot{z}(0)=V_1=-Z_m\sqrt{\frac{K}{m}}$$

ت.ع: $V_1=-0,04\times\sqrt{\frac{40}{0,1}}=-0,8\,m.s^{-1}$

3- المعادلة الزمنية :

بعد انفصاله عن النابض يخضع الجسم لوزنه فقط .

القانون الثاني لنيوتن يكتب : $\vec{P}=m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{g}$: ومنه $m\vec{a} = m\vec{g}$

الإسقاط على المحور Oz :

$$a = g = cte$$

المعادلة الزمنية تكتب :

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + z_0$$

لدينا : $g = 10\, m.s^{-2}$ و $V_0 = 0,8\, m.s^{-1}$ و $z_0 = 0$

$$z(t) = \frac{1}{2} \times 10t^2 + 0,8t z(t) = 5t^2 + 0,8t \Leftarrow$$

تصحيح تمرين 3 :

1-المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الجسم S :

القوى المطبقة على الجسم S خلال حركته :

-وزن الجسم : $\vec{P}$.

-تأثير النابض : $\vec{F}$.

-تأثير السطح الأفقي : $\vec{R}$

نطبق القانون الثاني لنيوتن ، نكتب:

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحور Ox :

$$-F + 0 + 0 = ma_x$$

$-Kx = m\ddot{x} \Leftarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ المعادلة التفاضلية للحركة

2-صلابة النابض K :

المعادلة التفاضلية تكتب : $\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$

حيث ω_0 النبض الخاص : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ أي: $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

نعلم أن : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ومنه : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

وبالتالي :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

تعبير الدور الخاص :

$$T_0^2 = 4\pi^2\frac{m}{K}$$

نستنتج :

$$K = 4\pi^2\frac{m}{T_0^2}$$

ت.ع:

$$k = 4\pi^2\frac{92.10^{-3}}{0,6^2} = 10N.m^{-1}$$

3-المعادلة الزمنية :

المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي ، يكتب على الشكل :

$$x(t) = X_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

حسب الشروط البدئية :

عند $t = 0$ لدينا :

$$\begin{cases} X_0 = 4cm > 0 \\ \dot{x}_0 = 0 \end{cases}$$

لدينا : $x(0) = X_m cos\varphi > 0$ أي: $cos\varphi > 0$

تعبير السرعة :

$$\dot{x}(t) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$x(0) = -\frac{2\pi}{T_0}X_m\, sin\varphi = 0$$

أي أن : $sin\varphi = 0$ ومنه فإن : $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$

بما أن : $cos0 > 0$ فإن: $\varphi = 0$ و $X_m = 4cm$

لدينا : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0{,}6} = \frac{10\pi}{3}$

نستنتج المعادلة الزمنية :

$$x(t) = 4.10^{-2} cos\frac{10\pi}{3}t$$

4-مميزات قوة الإرتداد عند اللحظة $t = 0,3s$:

متجهة قوة الإرتداد في كل لحظة :

$$\vec{F} = -Kx(t)\vec{\imath}$$

عند اللحظة $t = 0,3s$ أفصول مركز قصور الجسم (S) هو :

$$x(t = 0,3) = 4.10^{-2} cos\frac{10\pi}{3} \times 0,3 = -4.10^{-2}m$$

$$\vec{F} = -Kx(t = 0,3)\vec{\imath} = -10 \times (-4.10^{-2})\vec{\imath} = 0,4\,\vec{\imath}$$

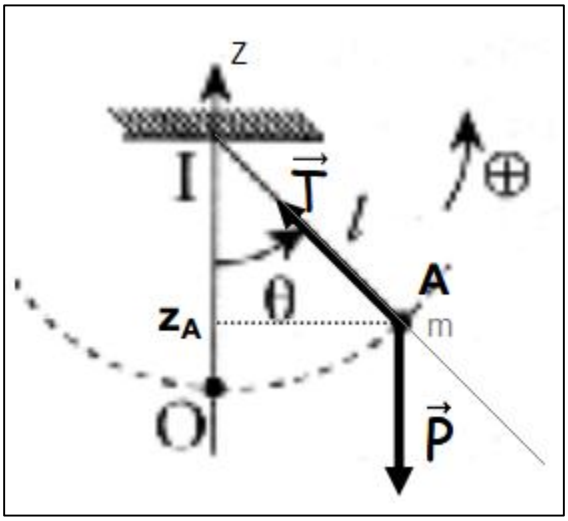
متجهة القوة $\vec{F}$ تكتب :

$$\vec{F} = F_x\vec{\imath}$$

حيث F_x إحداثي قوة الإرتداد وقمته موجبة: $F_x = 0,4\,N > 0$

نستنتج : أن عند اللحظة $t = 0,3s$ أتجاه و منحى $\vec{F}$ هو نفس اتجاه و منحى $\vec{\imath}$ (أي في المنحى الموجب وشدتها : $F = 0,4N$.

تصحيح التمرين 4:



. m

1-تمثيل القوى :

تخضع الكتلة m لقوتين :

$\vec{P}$: وزنها .

$\vec{T}$: تأثير الخيط .

2-المعادلة التفاضلية :

تطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\vec{P}+\vec{T}=m\vec{a}$$

نعتبر معلم فريني $(A\,,\vec{u},\vec{n}\,)$ حيث A موضع الكتلة

الإسقاط على المحور $(A,\vec{u})$:

$$-mgsin\theta+0=ma_T$$

التسارع المماسي : $a_T=\frac{dV}{dt}=\frac{d(\ell\dot{\theta})}{dt}=\ell\frac{d\dot{\theta}}{dt}$

أي: $a_T=\ell\ddot{\theta}$

$$-mgsin\theta=m\ell\ddot{\theta}$$

نستنتج :

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}sin\theta=0$$

المعادلة التفاضلية وهي غير خطية .

3-حالة التذبذبات الصغيرة :

عندما تكون θ صغيرة نكتب : $sin\theta\approx\theta$ المعادلة التفاضلية تصبح:

$$\ddot{\theta}+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

4-حل المعادلة التفاضلية:

يكتب الحل على الشكل التالي :

$$\theta(t)=\theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

بالإشتقاق نحصل :

$$\theta(\dot{t})=-\frac{2\pi}{T_0}\theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)$$

$$\ddot{\theta}(t)=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\theta_m cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t+\varphi\right)=-\frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta(t)$$

نعوض في المعادلة التفاضلية :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}\theta+\frac{g}{\ell}\theta=0$$

$$\theta\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2}+\frac{g}{\ell}\right)=0$$

لتتحقق هذه المعادلة مهما تكن t يجب أن يكون :

$$-\frac{4\pi^2}{T_0^2}+\frac{g}{\ell}=0$$

$$\frac{T_0^2}{4\pi^2} = \frac{\ell}{g}$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

5-استعمال معادلة الأبعاد نبين أن للدور الخاص T_0 بعد زمني :

لدينا:

$[\ell] = L$ و $[g] = L.T^{-2}$ لأن g متجانسة مع التسارع .

و $[\pi] = 1$ لأن π نعبر عنها ب rad التي ليس لها بعد في الفيزياء .

$$[T_0] = \frac{L^{1/2}}{[g]^{1/2}} = \frac{L^{1/2}}{L^{1/2}.T^{-2\times1/2}} = \frac{1}{T^{-1}}$$

نستنتج:

$$[T_0] = T$$

نستنتج أن وحدة T_0 هي الثانية .

تصحيح التمرين 5:

1-إثبات المعادلة الزمنية للحركة :

يخضع القرص للقوى التالية:

$\vec{P}$: وزن القرص.

$\vec{R}$: تأثير السلك.

مزدوجة اللي عزمها M_c.

نطبق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_c = J_\Delta\ddot{\theta}$$

$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خطا تأثير القوتين يمران من محو الدوران .

$$0 + 0 - C\theta = J_\Delta\ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_\Delta\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_\Delta}\theta = 0$ المعادلة التفاضلية لنواس اللي .

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

$$T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_\Delta}{C}$$

$$C = \frac{4\pi^2 . J_\Delta}{T_0^2}$$

مع : $J_\Delta = \frac{1}{2}mr^2$ و $\Delta t = 15T_0$ أي: $T_0 = \frac{\Delta t}{15}$

$$C = \frac{4\pi^2 . \frac{1}{2}mr^2}{\left(\frac{\Delta t}{15}\right)^2} = \frac{2\pi^2 \times 0,2 \times 0,1^2}{\left(\frac{17,2}{15}\right)^2} = 3.10^{-2} N.m.rad^{-1}$$

2- المعادلة التفاضلية خطية حلها جيبي يكتب على الشكل:

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

حيث : $\theta_m = \pi \, rad$ وسع الحركة

والنبض الخاص : $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_\Delta}} = \sqrt{\frac{C}{\frac{1}{2}mr^2}} = \sqrt{\frac{0,03}{\frac{1}{2}\times 0,2 \times 0,1^2}} = 5,48 \, rad.s^{-1}$

الطور عند أصل التواريخ :

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$

$$\theta(t=0) = \theta_m cos\varphi = \theta_m$$

$cos\varphi = 1$ أي: $\varphi = 0$

المعادلة الزمنية تكتب:

$$\theta(t) = \pi \cos(5,48t)$$

3-الطاقة الميكانيكية للقرص :

باعتبار المستوى الأفقي المار من G مركز قصور القرص مرجعا لطاقة الوضع الثقالية $E_{pp} = 0$

فالطاقة الميكانيكية تساوي مجموع الطاقة الحركية و طاقة وضع اللي:

$$E_m = E_c + E_{pp}$$

باعتبار الحالة المرجعية لطاقة وضع اللي $E_{pt} = 0$ عند $\theta = 0$ نكتب:

$$E_m = \frac{1}{2} J_\Delta . \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C . \theta^2$$

عند اللحظة $t = 0$ يكون $\theta = \pi$ و $\dot{\theta} = 0$ الطاقة الميكانيكية تكتب:

$$E_m = \frac{1}{2} C . \theta_m^2 = \frac{1}{2} \times 0.03 \times \pi^2 = 0,148 \, J$$

تصحيح تمرين 6:

1-المعادلة التفاضلية :

يخضع القضيب أثناء حركته:

لوزنه $\vec{P}$ وتأثير السلك $\vec{T}$ و تأثير مزدوجة اللي ذات العزم : $M_c = -C\theta$.

العلاقة الأساسية للديناميك : $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_0 \ddot{\theta}$

:

$$M_\Delta(\vec{P}) + M_\Delta(\vec{R}) + M_c = J_0\ddot{\theta}$$

$M_\Delta(\vec{P}) = M_\Delta(\vec{R}) = 0$ لأن خطا تأثير القوتين يمران من محو الدوران .

$$0 + 0 - C\theta = J_0\ddot{\theta}$$

وبالتالي:

$$J_0\,\ddot{\theta} + C\theta = 0$$

$\ddot{\theta} + \frac{C}{J_0}\theta = 0$ المعادلة التفاضلية لنواس اللي .

النبض الخاص :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J_0}}$$

الدور الخاص:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{C}}$$

2-تعبير الدور الخاص للمجموعة المتذبذبة بعد إضافة السحمتين هو:

الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_\Delta}{C}}$$

مع : $J_\Delta = J_0 + 2md^2$

وبالتالي الدور الخاص:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}}$$

3-تحديد قيمة كل من C و J_0 :

لدينا:

$$T'_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2md^2}{C}} \Leftarrow T'^{\,2}_0 = \frac{4\pi^2.J_0}{C} + \frac{8\pi^2.m}{C}d^2$$

المنحنى $T'^{\,2}_0 = f(d^2)$ عبارة عن دالة تآلفية معادلتها تكتب :

$$T'^{\,2}_0 = A.d^2 + B$$

حيث A تمثل المعامل الموجه للمستقيم نكتب:

$$A = \frac{\Delta T'^{\,2}_0}{\Delta d^2} = \frac{(20-10)s^2}{(2,5.10^{-3}-0)m^2} = 4.10^3\ s^2.m^{-2}$$

و $B = T'^{\,2}_0$ عندما تكون $d^2 = 0$

مبيانيا نجد : $B = 10\ m^2$

معادلة المنحنى تكتب :

$$T'{_0}^2 = 4.10^3 d^2 + 10$$

بمقارنة المعادلتين الملونتين نجد:

$$C = \frac{8\pi^2 m}{4.10^3} \Leftarrow 4.10^3 = \frac{8\pi^2 m}{C}$$ ت.ع: $$C = \frac{8\pi^2 \times 0,35}{4.10^3} = 2.10^{-3} N.m.rad^{-1}$$

$$J_0 = \frac{10C}{\pi^2} \Leftarrow 10 = \frac{4\pi^2 J_0}{C}$$ ت.ع: $$J_0 = \frac{10 \times 2.10^{-3}}{\pi^2} = 5.10^{-4}\ kg.m^2$$