

تمرين في الأقمار الاصطناعية

قرر مركز الأبحاث الفضائية إرسال بعثة من الرواد من أجل دراسة بيئية للغلاف الجوي للأرض . دراسة بعض مراحل الرحلة .

الجزء الأول : مرحلة الإنطلاق

عند تشغيل المحرك يكون الانطلاق رأسيا ونقبل ان اندفاع الغازات المحترقة يكافئ قوة خارجية شدتها $F = 32,4.10^4 N$ تسمى قوة الدفع . نهمل الاحتكاك ونعتبر شدة مجال الثقالة ثابتة عند سطح الارض قيمتها $g_0 = 9,81 m.s^{-2}$ و كتلة المركبة عند الانطلاق $M = 2041.10^3 kg$.

- 1-أجرد القوى المطبقة على المركبة الفضائية عند لحظة الانطلاق .
- 2-أحسب تسارع المركبة a_0 عند لحظة الانطلاق .
- 3-أحسب السرعة و الارتفاع التي تصل إليها المركبة عند التاريخ $t = 2,5 mn$ إذا افترضنا ان التسارع ثابت .
- 4-في الحقيقة سرعة المركبة أكبر من السرعة التي تم حسابها سابقا . اعط تفسيرا لذلك.

الجزء الثاني : الحركة الدائرية حول الأرض

بعد $10 mn$ من الانطلاق ، تدخل المركبة إلى مدارها الدائري حول الأرض على ارتفاع $z = 300 km$ وتكون كتلتها $m = 69,68.10^3 kg$. نعتبر المركبة نقطة مادية والأرض كروية الشكل شعاعها $R_T = 6400 km$.

- 1-مثل على الشكل 1 متجهة القوة $\vec{F}$ المطبقة على المركبة .
- 2-بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد تعبير تسارع المركبة بدلالة z , R_T , M_T كتلة الارض و G ثابتة التجاذب الكوني.
- 3-أعط تعبير سرعة المركبة بدلالة G , M_T و $r = R_T + h$.
- 4-تحقق من القانون الثالث لكبلير .
- 5-علما ان سرعة المركبة هي $V = 7,74 km.s^{-1}$ ، أحسب كتلة الأرض M_T .

نعطي : $G = 6,67.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$

الجزء الثالث : مرحلة النزول

1-فتح المظلة

خلال مرحلة النزول تكون حركة المركبة رأسية . عند الإرتفاع z_1 تفتح المظلة المرتبطة بالمركبة فتخضع المجموعة إلى قوة احتكاك منحها معاكس لمنحى السرعة و التي نمذج شدتها ب $f = kV_z^2$ حيث V_z سرعة المركبة على المحور Oz و k ثابتة .

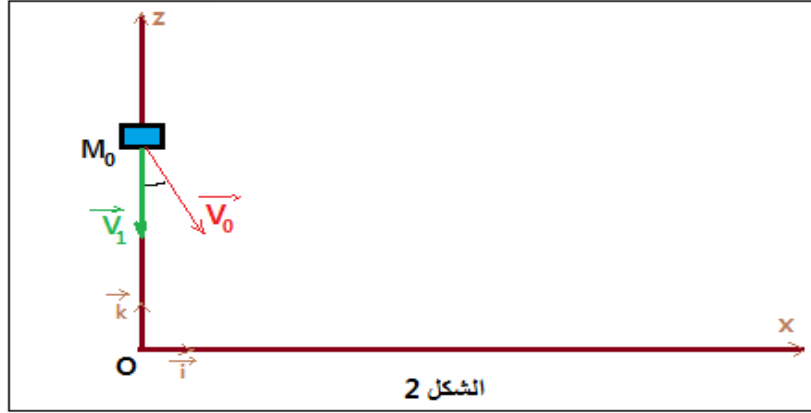
نهمل دافعة ارخميدس ونختار المحور Oz موجه نحو الأعلى أصله O عند سطح الأرض .

- 1.1-أكتب المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة V_z .
- 2.1-تصل سرعة المركبة إلى قمة حدية $V_{lim} = 10 m.s^{-1}$. حدد وحدة الثابتة k ثم أحسب قيمتها .

2-انفلات جسم من المركبة

عندما تصل المركبة إلى النقطة M_0 ذات الإحداثيتين $(x_0 = 0, z_0 = h = 3 km)$ في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبره غاليليا بسرعة $V_0 = V_{lim} = 10 m.s^{-1}$ في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ ، ينفلت جسم (S) من المركبة بسرعة $V_0 = V$ تكون زاوية $\alpha = 11^\circ$ مع الخط الراسي (أنظ الشكل 2) .

- 1.2- أكتب المعادلتين الزميتين لحركة الجسم (S) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 2.2- أكتب المعادلة الزمنية لحركة المركبة.
- 3.2- حدد أيهما يصل الأول إلى سطح الأرض المركبة أم الجسم (S).
- 4.2- حدد المدة الزمنية الفاصلة بين وصول كل منهم إلى سطح الأرض.



التصحيح :

الجزء الأول : مرحلة الإنطلاق

1- جرد القوى المطبقة على المركبة الفضائية عند لحظة الانطلاق

تخضع المركبة إلى :

قوة الدفع : $\vec{F}$

وزنها : $\vec{P}$

2- حساب تسارع المركبة a_0 عند لحظة الانطلاق

حسب بالقانون الثاني لنيوتن : $\vec{F} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}$

نسقط العلاقة على المحور Oz الموجه نحو الأعلى : $F - P = ma_0$

$$a_0 = \frac{F}{m} - \frac{m \cdot g}{m} \Rightarrow a_0 = \frac{F}{m} - g \Rightarrow a_0 = \frac{32,4 \cdot 10^3}{2041 \cdot 10^3} - 9,81 \Rightarrow a_0 = 6,06 \text{ m.s}^{-2}$$

3- حساب السرعة و الارتفاع التي تصل إليها المركبة عند التاريخ $t = 2,5 \text{ mn}$

$$a_0 = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = a_0 \cdot t + V_0$$

لدينا عند $t = 0$ سرعة المركبة منعدمة $V_0 = 0$ ومنه : $V = a_0 \cdot t$ ت.ع : $V = 6,06 \times 2,5 \times 60 = 909 \text{ m.s}^{-1}$

المعادلة الزمنية تكتب : $z = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2 + z_0$ لدينا عند $t = 0$ أنسوب المركبة منعدم $z_0 = 0$ ومنه :

$$z = \frac{1}{2} \times 6,06 \times 2,5 \times 60 = 454,5 \text{ m} \Leftarrow z = \frac{1}{2} a_0 \cdot t^2$$

4- لماذا سرعة المركبة أكبر من التي تم حسابها ؟

تعبير شدة الثقالة عند الارتفاع z هو : $g = g_0 \cdot \frac{R_T^2}{(R_T + z)^2}$ إذن كلما تزايد الارتفاع z تناقصت قيمة g وبالتالي قيمة

التسارع a تتزايد حسب العلاقة : $a = \frac{F}{m} - g$ وبالتالي سرعة المركبة أكبر من القيمة التي تم حسابها .

الجزء الثاني : الحركة الدائرية حول الأرض

1- تمثيل ، على الشكل 1 ، $\vec{F}$ متجهة القوة المطبقة على المركبة من طرف الأرض

2- تعبير a تسارع المركبة

تخضع المركبة إلى قوة التجاذب الكوني التي تطبقها الأرض تعبيرها :

$$\vec{F} = G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \cdot \vec{n}$$

القانون الثاني لنيوتن يكتب : $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ أي : $m \cdot \vec{a} = G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + h)^2} \cdot \vec{n}$ إذن : $\vec{a} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2} \cdot \vec{n}$

تعبير التسارع هو : (1) $a = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$

3- تعبير V سرعة المركبة

في معلم فريني متجهة التسارع تكتب : $\vec{a} = a_T \cdot \vec{u} + a_N \cdot \vec{n}$

وبالتالي : $a_T = 0$ و (2) $a = a_N = \frac{V^2}{R_T + z}$

من العلاقتين (1) و (2) نكتب : $\frac{V^2}{R_T + z} = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$ وبالتالي :

$$V = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}} \quad (3)$$

4- التحقق من القانون الثالث لكبلير

نعلم ان $V = (R_T + h) \cdot \omega$ أي : $V = (R_T + h) \cdot \frac{2\pi}{T}$ حسب العلاقة (3)

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}} = (R_T + h) \cdot \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \frac{G \cdot M_T}{R_T + z} = \frac{4\pi^2 \cdot (R_T + z)^2}{T^2}$$

$$\frac{T^2}{(R_T + z)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T} = C^{te}$$

5- حساب M_T كتلة الأرض

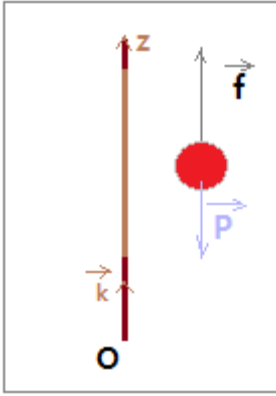
العلاقة (3) تكتب : $V^2 = \frac{G \cdot M_T}{R_T + z}$ إذن : $G \cdot M_T = V^2 \cdot (R_T + z)$ أي : $M_T = \frac{V^2 \cdot (R_T + z)}{G}$

$$M_T = \frac{(7,74 \times 10^3)^2 \times (6400 \times 10^3 + 300 \times 10^3)}{6,67 \times 10^{-11}} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

ت.ع :

الجزء الثالث : مرحلة النزول

1-مرحلة فتح المظلة



1.1- كتابة المعادلة التفاضلية التي تحققها السرعة V_z

تخضع المظلة لقوة الاحتكاك $\vec{f}$ والوزن $\vec{P}$.

تطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

الإسقاط على المحور Oz : $f - P = m \cdot a$ أي : $kV_z^2 - m \cdot g = m \cdot \frac{dV_z}{dt}$

$$\frac{dV_z}{dt} = \frac{k}{m} \cdot V_z^2 - g$$

2.1- وحدة وقيمة الثابتة k

وحدة k هي : $[k] = \frac{kg \times m \times s^{-2}}{m^2 \times s^{-2}} = kg \cdot m^{-1}$

في النظام الدائم يكون $V_z = V_{lim} = C^{te}$ إذن : $\frac{dV_z}{dt} = 0$ المعادلة التفاضلية تكتب :

$$k = \frac{69,68 \times 10^3 \times 9,81}{100} = 6835,6 \approx 6,8 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot m^{-1} \quad \text{ت.ع.} \quad k = \frac{m \cdot g}{V_{lim}^2} \quad \text{أي} \quad \frac{k}{m} \cdot V_{lim}^2 - g = 0$$

2-مرحلة انفلات جسم من المركبة

1.2- المعادلتية الزمنية لحركة الجسم (S)

نطبق القانون الثاني على الجسم (S) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{أي} \quad m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{وبالتالي} \quad \vec{a}_G = \vec{g}$$

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cdot \sin \alpha \\ V_{0z} = -V_0 \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x_0 = 0 \\ z_0 = h \end{cases} \quad \text{حسب الشروط البدئية أي عند لحظة الانفلات} :$$

الاسقاط على Ox : $a_x = 0$ أي : $V_x = V_{0x} = V_0 \cdot \sin \alpha$ ومنه : $x(t) = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + x_0$

نحصل على : $x(t) = V_0 \cdot \sin \alpha \cdot t$ ت.ع. : $x(t) = 7,74 \cdot 10^3 \sin(11^\circ) \cdot t = 1,48 \cdot 10^3 \text{ m}$

الاسقاط على Oz : $a_z = -g$ أي : $V_z = -g \cdot t + V_{0z} = -g \cdot t - V_0 \cdot \cos \alpha$

ومنه : $z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 - V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + z_0$ أي : $z(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 - V_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + h$

ت.ع. : $z(t) = -4,9t^2 - 7,74 \cdot 10^3 \times \cos(11^\circ) \cdot t + 300 \times 10^3$ أي : $z(t) = -4,9t^2 - 7,6 \cdot 10^3 \cdot t + 3 \cdot 10^5$

2.2-المعادلة الزمنية لحركة المركبة

بما ان سرعة المركبة ثابتة ، فإن حركتها مستقيمة منتظمة وتتم على المحور Oz أي : $x = 0$ و $V_x = 0$

حسب الشروط البدئية : $z_0 = h$ و $V_{0z} = -V_{lim}$

المعادلة الزمنية تكتب : $z = -V_{lim} \cdot t + h$ ت.ع. : $z = -10 \cdot t + 3 \cdot 10^5$

3.2- لتكن t_1 تاريخ وصول الجسم (S) إلى سطح الأرض

عند سطح الأرض يكون $z = 0$ ومنه : $-\frac{1}{2}g \cdot t^2 - V_0 \cdot \cos\alpha \cdot t + h = 0$

$$t_1 = \frac{-7,6 \cdot 10^3 + \sqrt{(7,6 \cdot 10^3)^2 - 4 \times 4,9 \times (-3 \cdot 10^5)}}{2 \times 4,9} = 1590 \text{ s} \quad \text{نجد :} \quad 4,9 \cdot t^2 + 7,6 \cdot 10^3 \cdot t - 3 \cdot 10^5 = 0$$

لتكن t_2 تاريخ وصول المركبة إلى سطح الأرض :

$$t_2 = \frac{3 \cdot 10^5}{10} = 3 \cdot 10^4 \text{ s} \quad \text{وبالتالي :} \quad -10 \cdot t_2 + 3 \cdot 10^5 = 0 \quad \text{عند سطح الأرض يكون } z = 0 \text{ ومنه :}$$

الجسم (S) يصل قبل المركبة إلى سطح الأرض .

4.2- حساب $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3 \cdot 10^4 - 1590 = 28410 \text{ s} \Rightarrow \Delta t \approx 7,9 \text{ h}$$