

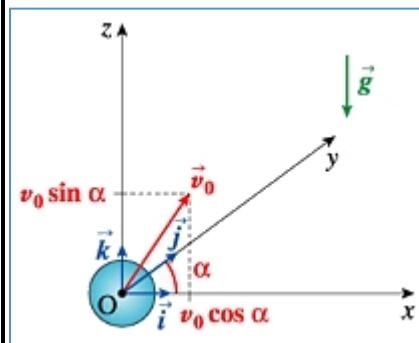


2- الحركات المستوية :

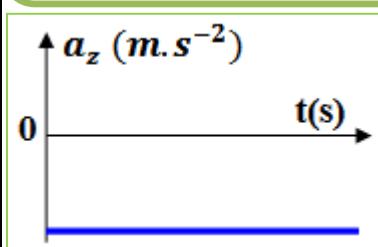
١-٢- حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم :

نسمى **قذيفة** كل جسم يُرسل على مقربة من الأرض بسرعة بدئية v_0 . لتبسيط الدراسة، نهمل جميع الاحتكاكات ونعتبر القذيفة خاضعة لوزنها **فقط** (سقوط حر).

في لحظة تعتبرها أصلاً للتاريخ ، نرسل من نقطة O جسماً صلباً (S) كتلته m بسرعة بدئية \vec{v}_0 تكون زاوية α مع الأفقي . نعتبر مجال الثقالة منتظاماً .



أثناء السقوط الرأسى الحر
لقدیفة بسرعة بدئية غير
رأسية ، تكون $\vec{a}_G = \vec{g}$



المجموعة المدروسة : { الجسم (S) } و تتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد المنظم $(\vec{R}, \vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} = m\vec{a} = m\vec{a}_c$$

أي $\vec{g} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -g \end{cases}$ حيث في المعلم $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا: $\vec{a}_G = \vec{g}$

نسقط العلاقة المتجهية في $(\vec{R}, \vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فنجد

المعادلات التفاضلية للحركة

نستنتج أن اتجاه متوجهة التسارع \vec{a} رأسي ومحاذها نحو الأسفل ومنظمهما هو

$$a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_z| = g$$

2-1-2 حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G_0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} : t = 0$$

الشروط البدئية عند اللحظة $t = 0$

ونعلم أن $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ وهي تمثل المعادلات التفاضلية للحركة .

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = -g \end{cases}$$

$$\vec{v}_G(t) \left\{ \begin{array}{l} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = C_2 = v_{0y} = 0 \\ v_z(t) = -gt + C_3 = -gt + v_{0z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad \text{و بعملية التكامل نحصل على :}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة

$$\frac{d\vec{OG}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(t) = v_0 \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} = v_y(t) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = v_z(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

ونعلم أن $\vec{v}_G(t) = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ إذن :

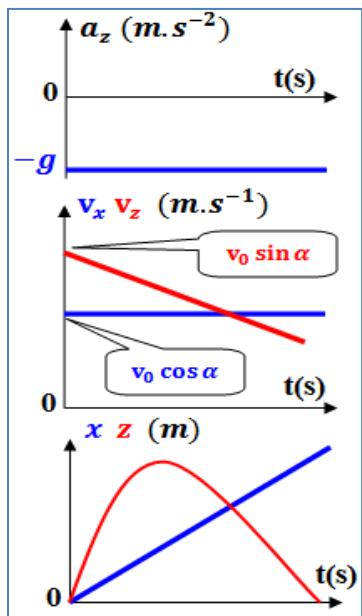
$$x(t) = v_0 \cos \alpha t + C_4 = v_0 \cos \alpha t$$

$$y(t) = C_5 = y_0 = 0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + C_6 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$$

وبعملية التكامل نحصل على :

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع .



■ بما أن $y(t)$ فإن الحركة مستوية وتقع في المستوى الرأسي (G, \vec{g}, \vec{v}_0) .

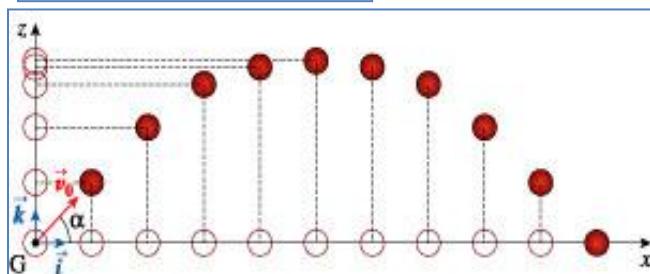
■ $x(t)$ دالة خطية ، إذن ، على المحور (O, \vec{i}) الحركة مستقيمية منتظمـة .

■ $z(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور (O, \vec{k}) الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

3-1-2- مسار مركز القصور :

1-3-1-2 معادلة المسار :

للحصول على معادلة المسار يجب إيجاد تعريف z بدلالة x وذلك باقصاء الزمن .



لدينا $t = \frac{x(t)}{v_0 \cos \alpha}$ أي $x(t) = (v_0 \cos \alpha)t$

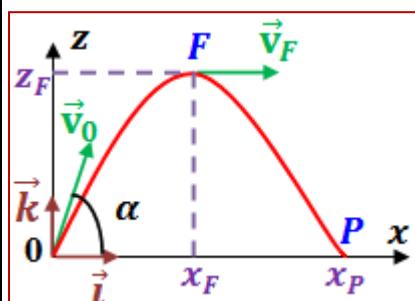
نعرض تعريف t في المعادلة الزمنية لـ z فنجد :

$$z(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x$$

إذن

$z(x)$ دالة من الدرجة الثانية ، أي تمثيلها المباني عبارة عن شلجم ينتمي إلى مستوى القذف . إذن ، الحركة شلجمية .



2-3-1-2 قمة المسار :

قمة المسار F هي أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

عند قمة المسار F تكون \vec{v}_z أفقية ، وبالتالي

$$t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - t_F + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$z_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad \text{و} \quad x_F = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار في حالة إرسال القذيفة رأسيا نحو الأعلى (أي $\alpha = \frac{\pi}{2}$) .

المدى : ٢-٣-٣-٣-١

المدى هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القذيفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة أشاء سقوط القذيفة بحيث تنتهي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

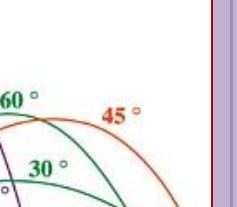
$$\text{لدينا } \mathbf{z}_P = 0 \quad \text{أي} \quad \left(-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P + \tan \alpha \right) x_P = 0$$

إذن حل هذه المعادلة هما :

$$\therefore (x_p = 2 \cdot x_F) \text{ نلاحظ أن } x_p = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \text{ أو } z_p = 0 \text{ إما}$$

بالنسبة لقيمة v_0 يكون المدى أقصى إذا كان $\alpha = 45^\circ$ (أي $\sin 2\alpha = 0$) بحيث

ملحوظة: من خلال العلاقاتين $x_P = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ و $Z_F = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ يتبيّن لنا :

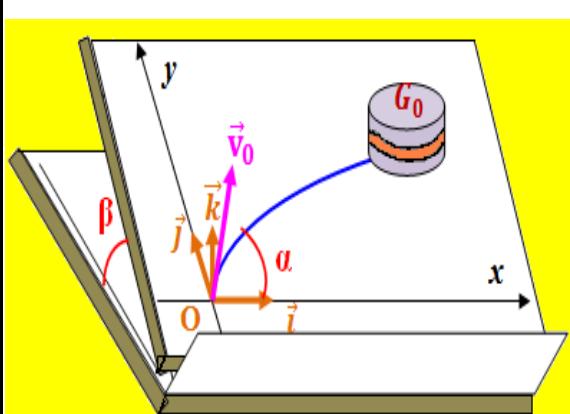
المنحنى	الملاحظات	
	<ul style="list-style-type: none"> ■ يتزايد المدى عندما تكبر α بين $[0^\circ; 45^\circ]$ ■ يتناقص المدى عندما تكبر α بين $[45^\circ; 90^\circ]$ ■ يأخذ المدى قيمة قصوى عند $\alpha = 45^\circ$ ■ يكون للمدى القيمة نفسها بالنسبة لزوايتين متكاملتين $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ■ يزداد z_F أنسوب قمة المسار بزيادة α 	<p>بالنسبة لقيمة ثابتة للسرعة البدئية v_0</p>
	<p>يزداد المدى و أنسوب قمة المسار كلما زادت قيمة السرعة البدئية v_0</p>	<p>بالنسبة لقيمة ثابتة لزاوية القذف α</p>

2-2- حركة جسم صلب على مستوى مائل :

في لحظة تعتبرها أصلاً للتاريخ ، نرسل حاملاً ذاتياً كتلته m فوق منضدة مائل بزاوية β عن الخط الأفقي بسرعة بدئية تكون زاوية α مع الحافة السفلية المنضدة . نعم ، جميع الاحتكاكات

1-2-2- المعادلات التفاضلية :

المجموعة المدروسة : {الحامل الذاتي } وتم دراسة الحركة في المعلم المتعامد الممنظم (\vec{k} , \vec{j} , \vec{R}) المرتبط بالأرض الذي نعتبره غاليليا .



جُرْدُ الْقُوَى : وزنِه \vec{P} وتأثير المنضدة \vec{R}

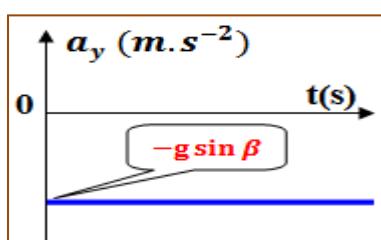
$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}_G \quad \text{بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نجد}$$

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = R_N \end{cases} \quad \text{و} \quad \vec{P} \begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = -mg \sin \beta \\ P_z = -mg \cos \beta \end{cases} \quad \text{في المعلم لدينا : } \mathcal{R}(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

. (oxy) لأن حركة الحامل الذاتي تتم على المستوى $a_z = \mathbf{0}$) $\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t)\mathbf{0} \\ a_z(t) = \mathbf{0} \end{cases}$

$$\left\{ \begin{array}{l} ma_x = 0 \\ ma_y = -mg \sin \beta \\ ma_z = R_N - mg \cos \beta = 0 \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_x + R_x = ma_x \\ P_y + R_y = ma_y \\ P_z + R_z = ma_z \end{array} \right.$$

نقط العلاقة المتجهية في $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ فنجد \mathcal{R}



$$\vec{a}_G(t) \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = -g \sin \beta \\ a_z(t) = 0 \end{cases} \text{ وبالتالي المعادلات التفاضلية للحركة هي : } \\ a_G = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |a_y| = g \sin \beta = cte \text{ التسارع ثابت}$$

٢-٢-٢ حل المعادلات التفاضلية :

$$\vec{v}_{G_0} \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_{0y} = v_0 \sin \alpha \\ v_{0z} = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{OG_0} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} : t = 0 \quad \text{الشروط البدئية عند اللحظة } t = 0$$

ونعلم أن $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt}$ إذن : $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = a_x(t) = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} = a_y(t) = -g \sin \beta \\ \frac{dv_z}{dt} = a_z(t) = 0 \end{cases}$ وهي تمثل المعادلات التفاضلية للحركة .

$$\vec{v}_G(t) \begin{cases} v_x(t) = C_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y(t) = -(g \sin \beta)t + C_2 = -(g \sin \beta)t + v_0 \sin \alpha \\ v_z(t) = C_3 = v_{0z} = 0 \end{cases}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة السرعة

$$\frac{d\overrightarrow{\text{og}}}{dt}(t) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mathbf{v}_x(t) = \mathbf{v}_0 \cos \alpha \\ \frac{dy}{dt} = \mathbf{v}_y(t) = -(g \sin \beta)t + \mathbf{v}_0 \sin \alpha \quad \text{إذن :} \\ \frac{dz}{dt} = \mathbf{v}_z(t) = \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{ونعلم أن } \vec{\mathbf{v}}_G(t) = \frac{d\overrightarrow{\text{og}}}{dt}$$

$$\overrightarrow{OG}(t) \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t + C_4 = (v_0 \cos \alpha)t \\ y(t) = -\frac{1}{2}(g \sin \beta)t^2 + (v_0 \sin \alpha)t \\ z(t) = C_6 = z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{وبعملية التكامل نحصل على :}$$

وهي تمثل المعادلات الزمنية لمتجهة الموضع.

- بما أن $z(t) = 0$ فإن الحركة مستوية وتتم في المستوى الماينل (\vec{j}, \vec{i}, O) .
- $x(t)$ دالة خطية، إذن، على المحور (O, \vec{i}) الحركة مستقيمية منتظمة.

■ $y(t)$ دالة من الدرجة الثانية ، إذن ، على المحور (\vec{O}, \vec{j}) الحركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

$$y(x) = -\frac{g \sin \beta}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + (\tan \alpha)x \quad \blacksquare$$