2

تطبيقات : السقوط الرأسي لجسم صلب

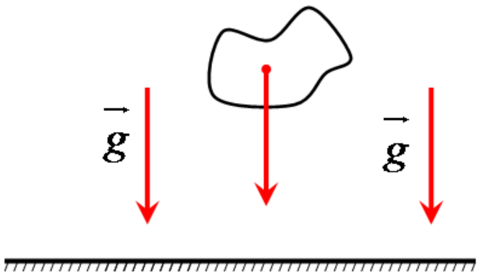
Application : chute vérticale d'un corps solide

I – مجال الثقالة :

❖ تعريف :

متجهة مجال الثقالة في مكان ما هي خارج قسمة $\vec{P}$ وزن جسم موجود في هذا المكان على الكتلة m لهذا الجسم $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$

❖ مميزات متجهة مجال الثقالة :



الاتجاه : مستقيم رأسي مار من مركز قصور الجسم.

المنحى : نحو الأرض

المنظم : $\|\vec{g}\|$ ب $N.kg^{-1}$

❖ ملحوظة :

تتعلق شدة مجال الثقالة بالارتفاع و بخط العرض (المكان) حيث تنقص بحوالي 0,3% كلما ابتعدنا عن بسطح بمسافة 10km

II – قوانين نيوتن :

1 – دافعة أرخميدس : Poussée d'Archimède

تسمى قوة التماس الموزعة المطبقة من طرف مائع (سائل أو غاز) على جسم مغمور فيه كليا أو جزئيا بدافعة أرخميدس و هي رأسية و موجهة نحو الأعلى ، و تتعلق شدتها بحجم الجزء المغمور من الجسم و طبيعة المائع و تساوي وزن المائع المزاح :

$$\boxed{\vec{F}_A = -\rho_f . V . \vec{g}}$$

ρ_f : الكتلة الحجمي للمائع $kg.m^{-3}$

V : الحجم المزاح للمائع ب m^3

g : شدة الثقالة ب $N.kg^{-1}$ أو $m.s^{-2}$

F_A : شدة دافعة أرخميدس ب N

2 – قوة الاحتكاك بالمائع :

تكافئ قوى الاحتكاك التي يطبقها مائع على جسم صلب في حركة قوة وحيدة $\vec{f}$ تسمى قوة الاحتكاك بالمائع : $\boxed{\vec{f} = -k\vec{v}^n}$

❖ مميزات قوة الاحتكاك $\vec{f}$:

نقطة تأثير : النقطة G مركز قصور الجسم

خط تأثير : اتجاه $\vec{v}_G$ متجهة السرعة

المنحى : عكس منحى $\vec{v}_G$

الشدة : تتعلق بشكل الجسم و أبعاده و بحالة سطحه و طبيعة السائل و بسرعة الجسم المتحرك و نعبر عن شدة قوة الاحتكاك ب $f = k.v^n$

k : ثابتة تتعلق بطبيعة المائع و شكل الجسم.

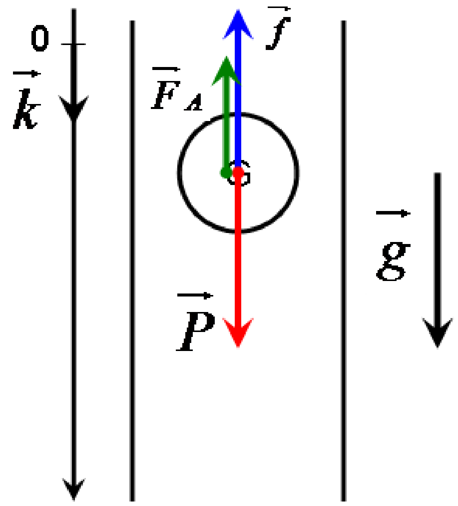
- إذا كانت v صغيرة فإن $n=1$ فتصبح العلاقة : $f=k.v$

- إذا كانت v كبيرة فإن $n=2$ فتصبح العلاقة : $f=k.v^2$

III – السقوط الرأسي باحتكاك :

1 – المعادلة التفاضلية للحركة :

ندرس حركة سقوط رأسي لكرية فولاذية في مائع (سائل) يوجد في حالة سكون بالنسبة لمعلم مرتبط بالأرض يعتبر غاليليا و محور $(O,\vec{k})$ موجه نحو الاسفل :



– الجسم المدروس : {كرية}

جرد القوى المطبقة على الكرية خلال سقوطها.

$\vec{P}$: وزن الكرية.

$\vec{F}_a$: دافعة أرخميدس $\vec{F}_a=m_f.\vec{g}$

$\vec{f}$: قوة الاحتكاك بالمائع $\vec{f}=-k.v_G^n.\vec{k}$

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext}=m\vec{a}_G$$

$$\vec{P}+\vec{F}_a+\vec{f}=m\vec{a_G}$$

نسقط العلاقة المتجهة وفق المحور $(O,\vec{k})$:

$$m.\vec{g}-m_f.\vec{g}-k.v_G^n.\vec{k}=m\vec{a}_G$$

$$m.g-m_f.g-k.v_G^n=ma_G$$

$$m.\frac{dv_G}{dt}=(m-m_f).g-k.v_G^n$$

$$\frac{dv_G}{dt}=\left(\frac{m-m_f}{m}\right).g-\frac{k}{m}.v^n$$

نضع : $A=\left(\frac{m-m_f}{m}\right).g$ و $B=\frac{k}{m}$

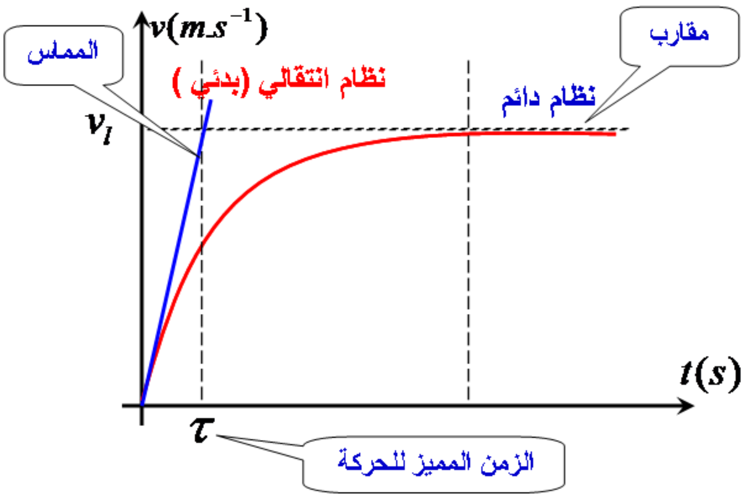
تمثل المعادلة التفاضلية لحركة G مركز قصور الكرية أثناء السقوط الرأسي في السائل :

$$\boxed{\frac{dv}{dt}=A-B.v^n}$$

2 – المقادير المميزة للحركة $(v_l \text{ ، } a_0 \text{ ، } \tau)$

أ – في النظام الدائم : السرعة الحدية

بينت الدراسة التجريبية لتغيرات v سرعة مركز قصور الكرية بدلالة الزمن أن السرعة تتناهى إلى قيمة حدية v_l :



- مبيانيا تساوي قيمة v_l أرتوب نقطة تقاطع الخط المقارب للمنحنى $v = f(t)$ و محور الأراتيب :

- لدينا من المعادلة التفاضلية : $\frac{dv}{dt} = A - B.v^n$

و لدينا عند $v = v_l$ فإن $\frac{dv}{dt} = 0$

$$\frac{dv}{dt} = A - B.v^n = 0 \quad \Rightarrow \quad B.v_l^n = A \quad \Rightarrow \quad v_l^n = \frac{A}{B}$$

$$B = \frac{k}{m} \quad \text{و} \quad A = \left(\frac{m - m_f}{m}\right).g \quad \text{و} \quad \boxed{v_l = \sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \left(\frac{A}{B}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

$$v_l = \left(\frac{\left(\frac{m - m_f}{m}\right).g}{\frac{k}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_l = \left(\left(\frac{m - m_f}{m}\right).g\right)^{\frac{1}{n}}}$$

عندما تقارب v السرعة الحدية v_l تخضع حركة G إلى نظام يسمى النظام الدائم.

ب – في النظام البدئي : التسارع البدئي

تحرر الكرية عند اللحظة $t = 0$ بدون سرعة بدئية $v_0(t = 0) = 0 \Leftarrow \vec{f} = \vec{0}$

إذن تصبح المعادلة التفاضلية : $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A - B.v_0^n$

$$a(t = 0) = a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A$$

حيث a_0 يمثل التسارع البدئي : $\boxed{a_0 = A = \left(\frac{m - m_f}{m}\right).g}$

مبيانيا تمثل a_0 المعامل الموجه للمماس المنحنى $v = f(t)$ عند اللحظة $t = 0$

ج – الزمن المميز للحركة : temps caractéristique

τ : الزمن المميز للحركة هو أفصول تقاطع الخط المماس للمنحنى $v = f(t)$ مع الخط المقارب للمنحنى $v = v_l$.

تحدد τ بالعلاقة : $\boxed{v_l = a_0.\tau}$

3 – حل المعادلة التفاضلية بتطبيق طريقة أولير Euler

- تمكن طريقة من التوصل إلى حل تقريبي للمعادلة التفاضلية للحركة و تتضمن هذه الطريقة مرحلتين من الحساب ، يجب إعادة انجازها بصفة تكرارية itératif و بالتالي فهي قيمة تكرارية.

- تستوجب هذه الطريقة معرفة السرعة البدئية v_0 عند $t = 0$

❖ المرحلة الأولى : نحسب التسارع البدئي a_0

حيث $v_0(t = 0)$ مع $\boxed{a_0 = \left(\frac{dv}{dt}\right)_{t=0} = A - B.v_0^n}$

❖ المرحلة الثانية : نحسب السرعة v_1 عند اللحظة t_1 مع $t_1 = t_0 + \Delta t$

نسمي Δt خطوة الحساب :

لدينا : $a_0 = \frac{v_1 - v_2}{\Delta t}$ ومنه $\boxed{v_1 = a_0.t + v_0}$

ثم نعيد حساب التسارع و السرعة المواليين :

- نحسب a_1 عند t_1 : $a_1 = A - B.v_1^n$

- نحسب v_2 عند t_2 : $v_2 = a_1.\Delta t + v_1$

❖ ملحوظة :

كلما كانت Δt خطوة الحساب صغيرة كلما كانت النتائج النظرية أقرب إلى التجربة عموما $\Delta t = \frac{\tau}{10}$

IV – السقوط الرأسي الحر :

يكون جسم صلب حر عندما يكون خاضعا فقط لقوة الثقالة (تأثير $\vec{P}$ وزنه فقط) و يتحقق السقوط الحر في الفراغ (مثال : تجربة أنبوب نيوتن) و في الهواء إذا كانت كثافته عالية و شكل انسيابي و سقوطه في مجال الثقالة من ارتفاعات محدودة.

1 – متجهة تسارع :

– الجسم المدروس : {كرية}

- الجسم المرجعي : معلم مرتبط بالأرض $(O, \vec{k})$ موجه نحو الأسفل.

- جرد القوى : نهمل تأثير الهواء.

$\vec{P}$: وزن الكرية

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}_G$$

$$\vec{P} = m\vec{a}_G$$

$$m.\vec{g} = m.\vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{g}$$

وفق المحور $(O,\vec{k})$:

$$a_z = g$$

وهي المعادلة التفاضلية للحركة :

$$\boxed{\frac{dv_z}{dt} = g}$$

2 – المعادلة التفاضلية للحركة :

لدينا $v_Z = g.t + v_0$ $\xleftarrow{\text{تكامل}}$ $\frac{dv_z}{dt} = g$

نعتبر الشروط البدئية : $v_Z(t=0) = v_0$

أي : $\boxed{v_Z = g.t}$ سرعة G دالة زمنية خطية

$z(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + z_0$ $\xleftarrow{\text{تكامل}}$ $v_Z = \frac{dv}{dt} = g.t$

نعتبر الشروط البدئية : $z(t=0) = z_0 = 0$

أي : $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}g.t^2}$ المعادلة الزمني للحركة

❖ تعميم :

بالنسبة لمعلم رأسي (O,z) موجه نحو الأسفل ، تكتب المعادلات التفاضلية لحركة مركز قصور جسم صلب في سقوط رأسي حر كالتالي :

$$\begin{cases} a = g \\ v(t) = g.t + v_0 \\ z(t) = \frac{1}{2}g.t^2 + v_0.t + z_0 \end{cases}$$

المعجم العلمي

مقارب	Asymptote	ثقالة	Pesanteur
مجال	Champ	مائع	Fluide
دافعة أرخميدس	Poussée d'Archimède	احتكاك	Frottement
سقوط	Chute	لزوجة	Viscosité
زمن مميز	Temps caractéristique	نظام دائم	Régime permanant
نظام انتقالي (مرحلي)	Régime transitoire	سرعة حدية	Vitesse limite
نظام بدئي	Régime initial	تكراري	itératif
خطوة	Pas	سقوط حر	Chute libre
تكامل	Intégral	خطية	Linéaire