

ميكانيك نيوتن



$$v_2 = \frac{|M_1 M_3|}{(t_3 - t_1)}$$

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

بملاحظة سقوط تفاحة ، اكتشف إسحاق نيوتن مفهوم التجاذب الكوني ، كوني لأنه لا يهتم فقط كوكب الأرض بل كذلك الكون ككل .
و قد توصل كذلك إلى بلورة القوانين الثلاثة التي تنظم حركة الأجسام .
إسحاق نيوتن (1642 - 1727)

1 (حركة مركز قصور جسم صلب . 1 - 1) تذكير .

نقتصر في الثانوي على دراسة ميكانيك النقطة المادية ، أي دراسة حركة نقطة ذات كتلة m في المكان و الزمان .
في أحسن الأحوال نستطيع أن نصف حركة مجموعة من النقط ساكنة فيما بينها و تكون جسما غير قابل للتشويه .
المرجع هو جسم صلب ندرس بالنسبة له حركة المجموعة . و هو ضروري بالنسبة للدراسة الميكانيكية ، حيث أن طبيعة حركة النقطة تتعلق بمرجع الدراسة .
نقرن بكل مرجع :

- معلم الفضاء $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، الذي نختاره بحيث يصف الحركة بطريقة أبسط .
 - معلم الزمن ، حيث أصل التواريخ يوافق بداية الحركة أو طورا مميزا .
- عندما يكون جسم صلب في سقوط حر ، توجد هناك نقطة من هذا الجسم لها أبسط حركة من النقط الأخرى : هذه النقطة هي مركز قصور الجسم ، نرمز له بالحرف G .
- مركز قصور جسم صلب متجانس منطبق مع مركز تماثله (إذا كان له مركز تماثل) .
- كل مجموعة مادية تتكون من مجموعة من الدقائق $A_1, A_2, \dots, A_N$ لها بالتتابع الكتل $m_1, m_2, \dots, m_N$ يمكن معرفة موضع مركز القصور G بتطبيق العلاقة المرجحية :

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_N \overrightarrow{GA_N} = \vec{0}$$

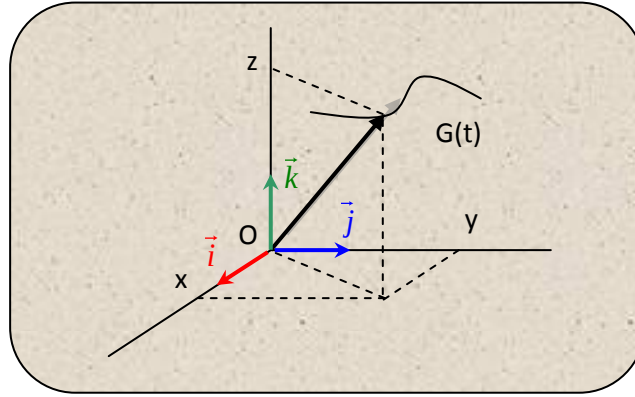
أو

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OA_1} + m_2 \overrightarrow{OA_2} + \dots + m_N \overrightarrow{OA_N}}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}$$

1 - 2 (متجهة الموضع .

○ معلم ديكارتي

يمكن معلمة موضع مركز القصور G لمجموعة في كل لحظة ، بواسطة متجهة الموضع $\overrightarrow{OG}$



في معلم الفضاء المرتبط بمرجع الدراسة نكتب :

$$\overrightarrow{OG} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

إذا كان الجسم في حالة حركة ، فإن الإحداثيات y, x و z تتغير . لذا نرمز لهم ب $y(t), x(t)$ و $z(t)$ و تسمى المعادلات الزمنية للحركة .

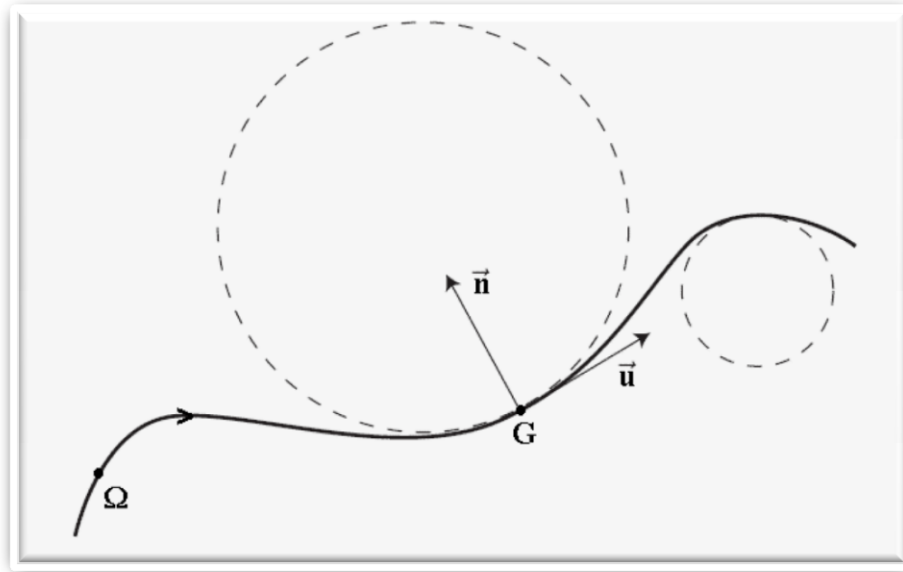
مجموع المواضع المحتملة بالتتابع من طرف G خلال الزمن تكون مسار هذه النقطة .

○ معلم فريني

معلم فريني معلم أصله مرتبط بالنقطة المتحركة G : $(G, \vec{u}, \vec{n})$

- $\vec{u}$ متجهة واحدة اتجاهها هو مماس المسار و موجهة في منحنى الحركة .

- $\vec{n}$ متجهة واحدة اتجاهها منظمي المسار و موجهة نحو تقعره .



خلال حركة مستوية يمكن

معلمة موضع G باعتماد

أفصولها المنحني :

$$s = \Omega G$$

Ω أصل الأفاصيل المنحنية

1 - 3 (متجهة السرعة .

السرعة اللحظية $v(t_i)$ لنقطة متحركة M عند اللحظة t_i تساوي السرعة المتوسطة لهذه النقطة بين اللحظتين t_{i-1} و t_{i+1} اللتان

تؤطران t_i و قريبتين أقصى ما يمكن من اللحظة t_i :

$$v(t_i) = \frac{\widehat{M_{i-1}M_{i+1}}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

في مرجع معين ، متجهة السرعة $\vec{v}$ لنقطة متحركة M هي المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة الموضع $\vec{OM}$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$

في مجال زمني صغير جدا ، لدينا :

$$\vec{v}(t_i) \approx \frac{\vec{OM}_{i+1} - \vec{OM}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\Delta \vec{OM}(t_i)}{\Delta t}$$

يمكن أن نكتب إذن :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{OM}(t)}{dt}$$

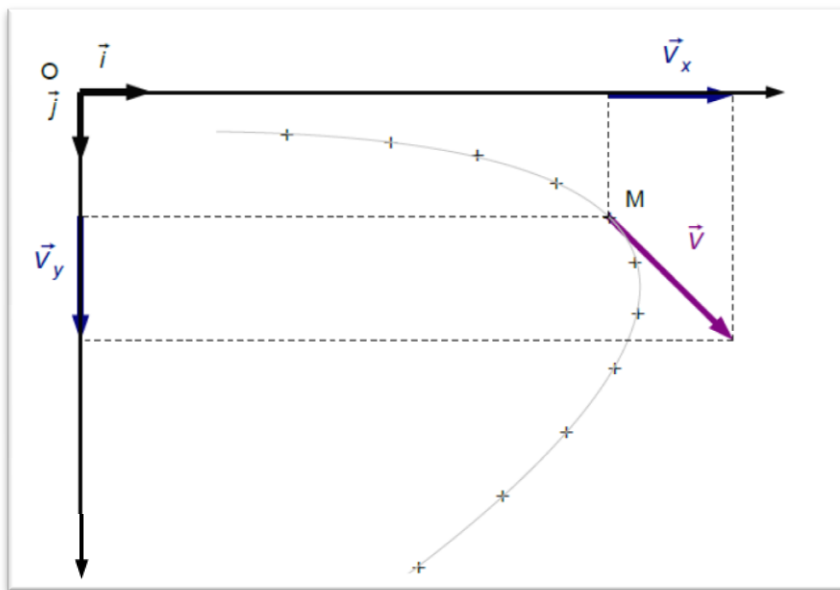
و بذلك فإن متجهة السرعة اللحظية محمولة من طرف مماس المسار عند لحظة t و موجهة في منحنى الحركة .

* إحداثيات متجهة السرعة :

في معلم فريني	في معلم ديكارتي
$\vec{V} = V\vec{u}$ مع : $V = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ V تمثل القيمة الجبرية لمنظم متجهة السرعة اللحظية $ \vec{V} = \ \vec{V}\ = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \quad (\text{m.s}^{-1})$	$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}$ مع : $V_x(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$ $V_y(t) = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ $V_z(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

* ملحوظة :

إحداثيات متجهة قيم جبرية ، لا يجب الخلط بينها و بين مركباتها التي هي متجهات .



مركبة متجهة السرعة

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

إحداثيات متجهة السرعة

1-4 (متجهة التسارع .

* تعريف :

في مرجع معيّن ، متجهة التسارع $\vec{a}$ لنقطة متحركة هي المشتقة بالنسبة للزمن لمتجهة السرعة $\vec{V}$ لهذه النقطة المتحركة :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

في النظام العالمي للوحدات ، قيمة التسارع يعبر عنها بوحدة $(m.s^{-2})$:

$$[a_G] = \left[\frac{\Delta v_G}{\Delta t} \right] = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$$

* الإحداثيات :

لنعتبر متجهة الموضع $\vec{OM}$ في معلم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)}_{a_x} \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{dv_y}{dt}\right)}_{a_y} \vec{j} + \underbrace{\left(\frac{dv_z}{dt}\right)}_{a_z} \vec{k}$$

إحداثيات متجهة التسارع هي مشتقات إحداثيات متجهة السرعة :

$$\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{array} \right.$$

* التحديد المبياني :

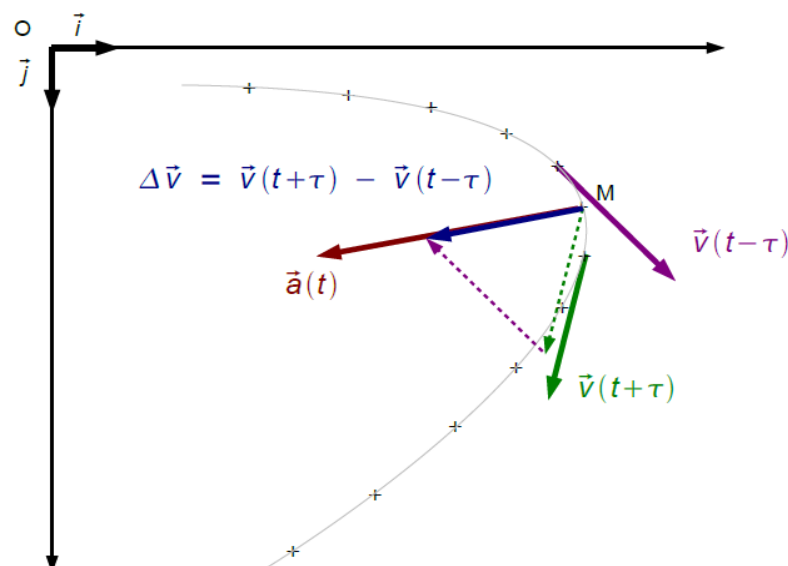
بالاعتماد على تسجيل لمواضع نقطة متحركة خلال مدد متتالية و متساوية τ ، يمكن تحديد متجهة التسارع في موضع ما بتطبيق علاقة

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad \text{مع} \quad \Delta t = 2\tau$$

التأثير :

عند اللحظة t توجد النقطة المتحركة عند الموضع M مثلا :

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{V}(t+\tau) - \vec{V}(t-\tau)}{2\tau}$$

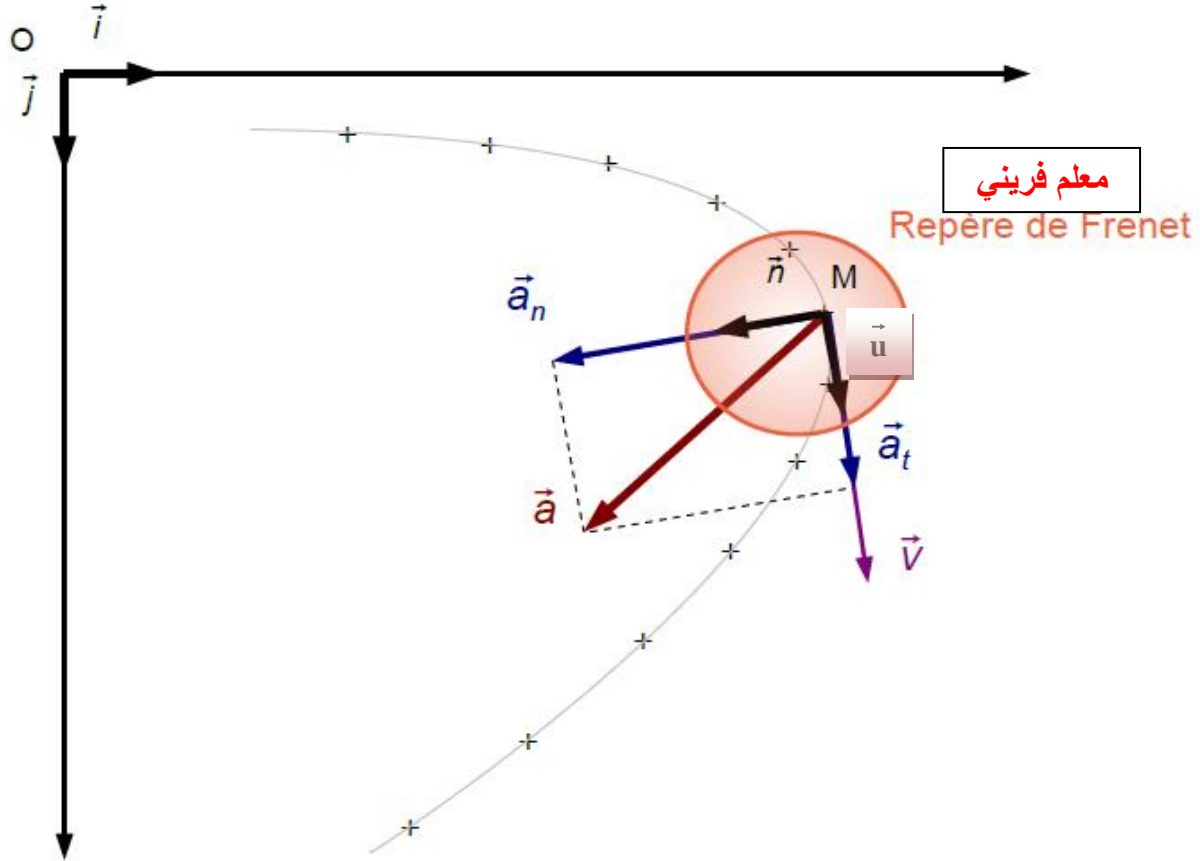


* المركبة المنظمية و المركبة المماسية :

في معلم فريني $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{u} + V \frac{d\vec{u}}{dt}$ ، يمكن أن نبرهن أن $\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{V^2}{\rho} \vec{n}$ حيث نكتب :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt} \vec{u} + \frac{V^2}{\rho} \vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

مع ρ : شعاع انحناء المسار عند النقطة المعنية . إذا كان المسار دائريا فإن شعاع الانحناء هو شعاع الدائرة .



المركبة المماسية للتسارع

المركبة المنظمية للتسارع

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

مع :

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

و

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

قيمة a_n دائما موجبة ، متجهة التسارع دائما موجه نحو تقعر المسار

$$a = \|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

منظم متجهة التسارع :

* منحى متجهة التسارع و طبيعة الحركة :

يمكن للإحداثي المماسي a_t أن يكون موجبا ، في هذه الحالة يكون منحى المتجهة $\vec{a}_t$ هو منحى السرعة $\vec{V}$ (منحى الحركة) .

و بالتالي يكون الجداء السلمي $\vec{V} \cdot \vec{a}_t$ موجبا (أي : $\vec{V} \cdot \vec{a}_t > 0$) .

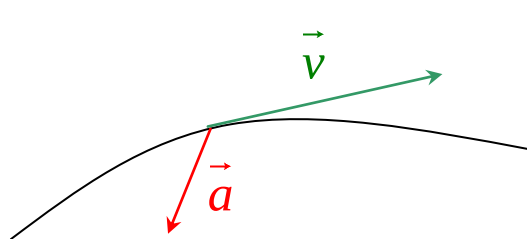
كما يمكن للإحداثي a_t أن يكون سالبا ، و في هذه الحالة يكون منحى $\vec{a}_t$ و منحى $\vec{V}$ متعاكسان ، و بالتالي يكون الجداء السلمي $\vec{V} \cdot \vec{a}_t$

سالبا (أي : $\vec{V} \cdot \vec{a}_t < 0$) .

و بما أن الإحداثي a_n دائما موجب ، نستنتج من هذه الملاحظات أن إشارة الجداء السلمي $\vec{V} \cdot \vec{a}_t$ تحدد طبيعة الحركة . و ذلك لأن :

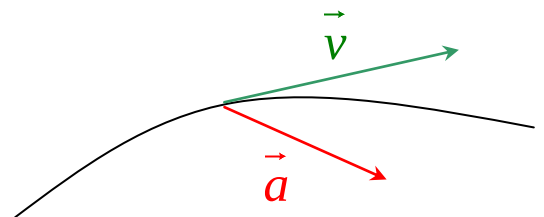
$$\vec{V} \cdot \vec{a} = \vec{V} \cdot (\vec{a}_t + \vec{a}_n) = \vec{V} \cdot \vec{a}_t + \vec{V} \cdot \vec{a}_n = \vec{V} \cdot \vec{a}_t + 0$$

فإذا كان $\vec{V} \cdot \vec{a} > 0$ فإن الحركة متسارعة و إذا كان $\vec{V} \cdot \vec{a} < 0$ فإن الحركة متباطئة .
أما إذا كان $\vec{V} \cdot \vec{a} = 0$ فإن الحركة منتظمة



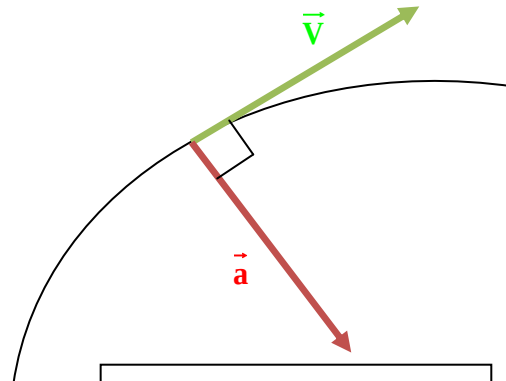
$$\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$$

الحركة متباطئة



$$\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$$

الحركة متسارعة



$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$$

الحركة منتظمة

2) قوانين نيوتن :

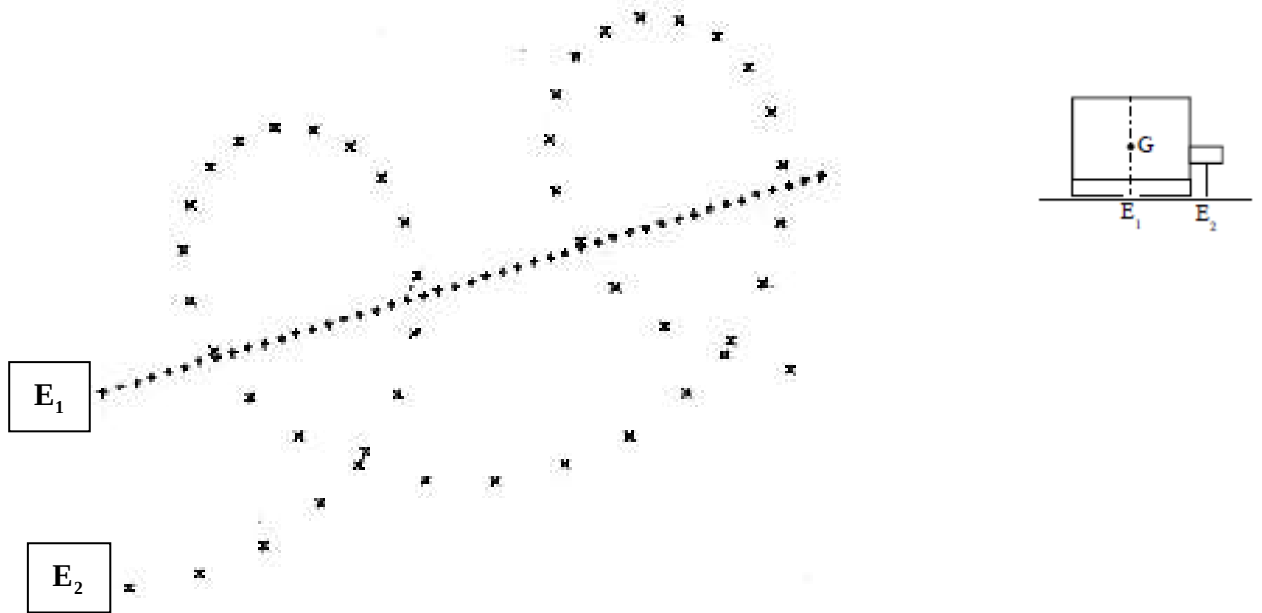
1 - 2) القانون الأول : مبدأ القصور .

في معلم غاليلي ، إذا كان المجموع المتجهي للقوى الخارجية المطبقة على جسم صلب مجموع منعدم (جسم صلب شبه معزول) ، فإن متجهة سرعة مركز قصوره متجهة ثابتة ، و العكس صحيح .

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_G = \vec{Cste}$$

مركز قصور جسم صلب خاضع لقوى متوازنة ، إما أن يكون ساكنا ($\vec{V}_G = \vec{0}$) ، أو أن يكون له حركة حركة مستقيمة منتظمة ($\vec{V}_G = \vec{Cte} \neq \vec{0}$) .

القانون الأول يخص فقط مركز قصور جسم صلب ، و لا يهم النقط الأخرى .



لا يطبق مبدأ القصور إلا في المعالم الغاليلية . قبل حل أي مسألة في الميكانيك يجب التأكد من أن المعلم المختار لدراسة حركة مركز القصور معلم غاليلي . مثلا المعلم المركزي الشمسي (معلم كوبرنيك)
المعلم المركزي الأرضي أو المعلم الأرضي معالم غاليلية بتقريب (حركات ذات مدة قصيرة) .
* مثال :

في المرجع الأرضي ، نعتبر متزلج كتلته $m = 60\text{kg}$ ينزل مستوى مائل بالزاوية $\alpha = 25^\circ$ بالنسبة للمستوى الأفقي .
المتزلج له حركة مستقيمة منتظمة .
أحسب شدة قوة الاحتكاك و شدة القوة المنظمة المطبقة من طرف السطح المائل على المتزلج . نأخذ $g = 9,8\text{N.kg}^{-1}$

نعتبر أن المرجع الأرضي مرجعا غاليليا
الجسم المدروس هو المتزلج
جاء القوى :

$\vec{P}$ الوزن

$\vec{R}$ القوة المنظمة المطبقة من طرف السطح على المتزلج

$\vec{f}$ قوة الاحتكاك

الحركة مستقيمة منتظمة ، و حسب
القانون الأول لنيوتن :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0}$$

اختيار معلم للإسقاط $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

في هذا المعلم :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} P_x + R_x + f_x = 0 \\ P_y + R_y + f_y = 0 \end{cases}$$

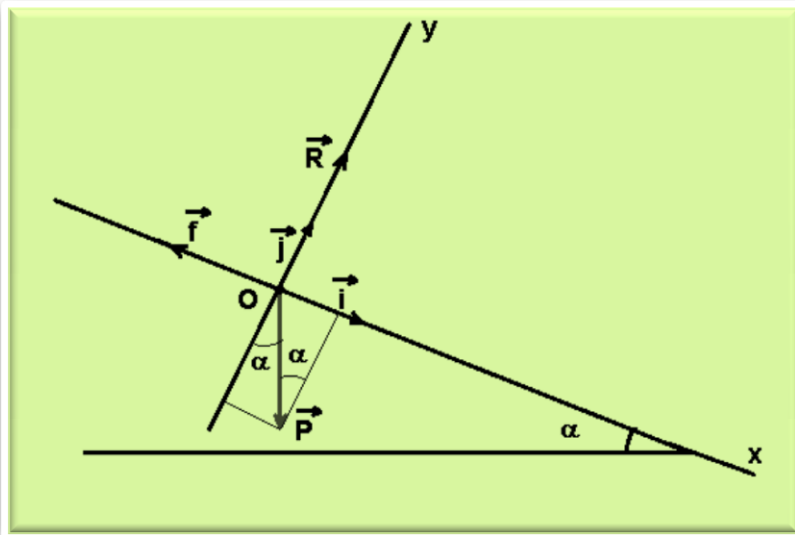
إحداثيات المتجهات في هذا المعلم :

$$\vec{R} \begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = R \end{cases} ; \vec{f} \begin{cases} f_x = -f \\ f_y = 0 \end{cases} ; \vec{P} \begin{cases} P_x = P \cdot \sin \alpha \\ P_y = -P \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$P \cdot \sin \alpha + 0 - f = 0 \Rightarrow f = P \cdot \sin \alpha$$

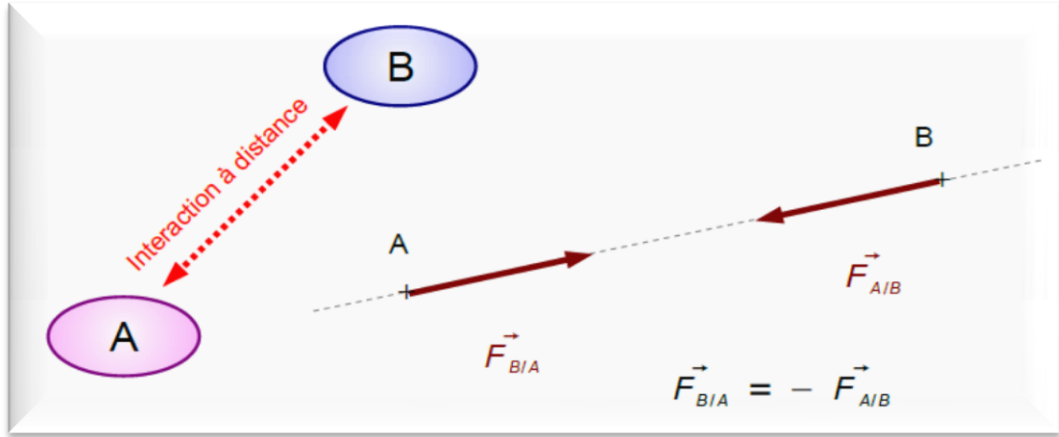
$$-P \cdot \cos \alpha + R + 0 = 0 \Rightarrow R = P \cdot \cos \alpha$$

بما أن $P = m \cdot g$ فإن : $f = m \cdot g \cdot \sin \alpha = 249\text{N}$ و $R = m \cdot g \cdot \cos \alpha = 530\text{N}$



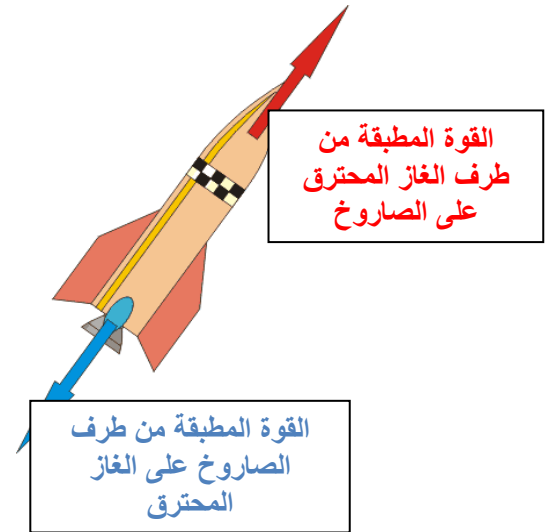
2 - 2) القانون الثالث : مبدأ التأثيرات البينية .

لنعتبر جسمين A و B في تأثير بيني . القوة المطبقة من طرف A على B : $\vec{F}_{A/B}$ و القوة المطبقة من طرف B على A : $\vec{F}_{B/A}$. كيفما كانت حالة حركة أو سكون الجسمين ، فإن القوتين يحققان المتساوية :

$$\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$$


*ملحوظة : القانون الثالث يبقى صالحا كيفما كان المرجع غاليليا أو غير غاليليا .

* مثال : التأثير بيني الحاصل بين صاروخ و الغاز المحترق . القوتان المتبادلتان متعاكستان



2 - 3) القانون الثاني : مبرهنة مركز القصور (العلاقة الأساسية للديناميك) .

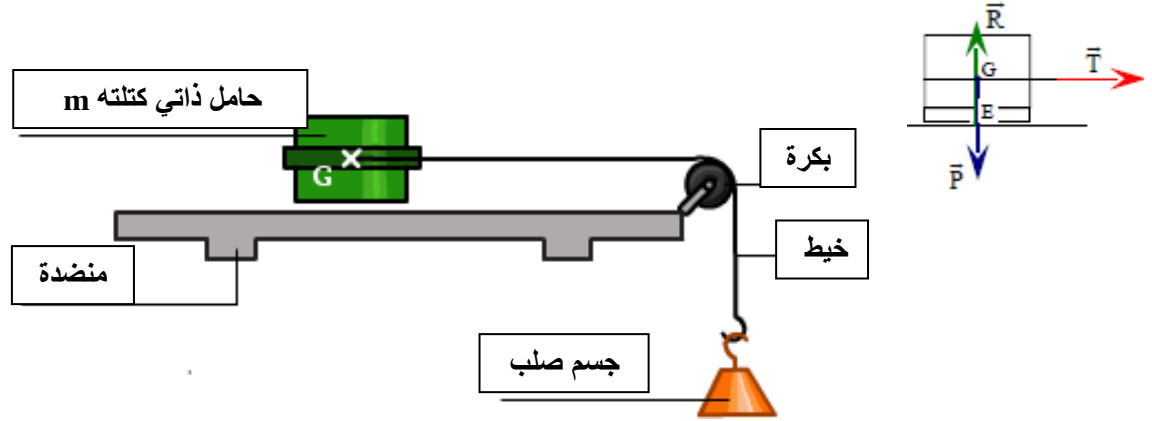
في مرجع غاليلبي يساوي مجموع متجهات القوى الخارجية المطبقة على جسم صلب ، جذا كتلته و متجهة تسارع مركز قصوره في كل لحظة .

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \times \vec{a}_G$$

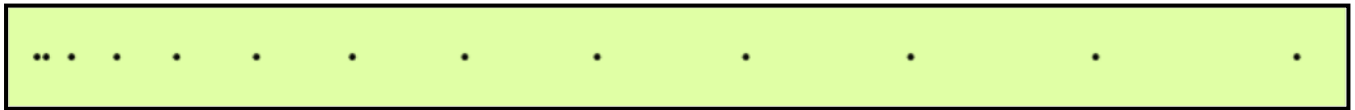
كالقانون الأول لنيوتن ، القانون الثاني لنيوتن لا يطبق إلا بالنسبة لحركة مركز القصور ؛ و العلاقة التي ينص عليها غير صالحة إلا في المعالم الغاليلية .

* ملحوظة : متجهة تسارع مركز القصور $\vec{a}_G$ و متجهة حصلة القوى الخارجية $\sum \vec{F}_{\text{ext}}$ يوجدان في نفس المستقيم و لهما نفس المنحى .

* مثال : حامل ذاتي مجرور على منضدة تحت تأثير القوة المطبقة من طرف خيط .



يجر حامل ذاتي على منضدة أفقية بدون احتكاك تحت تأثير قوة ثابتة $\vec{F}$ اتجاهها أفقي . ثم نسجل مواضع مركز قصوره G خلال مدد زمنية متتالية و متساوية $\tau = 40ms$ فنحصل على التسجيل التالي :



يمكن التحقق من أن حركة G حركة مستقيمة متسارعة بانتظام أي $\vec{a}_G = \frac{\Delta \vec{V}}{2\tau} = \vec{Cte}$

و أن هناك تناسب بين حسيلة القوى المطبقة على الحامل الذاتي $\vec{F}$ و متجهة تسارع مركز القصور $\vec{a}_G$ و معامل التناسب هو كتلة

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}_G$$

الحامل m : **3 (الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام .**
* تعريف :

نقول بأن حركة مركز القصور G لجسم صلب حركة مستقيمة متغيرة بانتظام ، عندما يكون مساره مستقيما و تسارعه ثابتا :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{Cte}$$

* المعادلة الزمنية :

باستعمال الحساب التكاملي و انطلاقا من العلاقة السابقة ، نحصل على المعادلة الزمنية : $x = f(t)$

$$a = \frac{dV}{dt} \rightarrow V = at + V_0$$

$$V = \frac{dx}{dt} = at + V_0 \rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

المعادلة الزمنية لحركة مستقيمة متغيرة بانتظام معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للزمن t :

$$x = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0$$

* خلاصة :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \xleftrightarrow[\text{تكامل}]{\text{اشتقاق}} V = at + V_0 \\ V &= at + V_0 \xleftrightarrow[\text{تكامل}]{\text{اشتقاق}} a = \frac{dV}{dt} = Cte \end{aligned}$$

* ملحوظة :

تتعلق قيمتا V_0 و x_0 بالشروط البدئية للحركة (الموضع و السرعة في اللحظة $t = 0$)

* خاصيات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام :

العلاقة المستقلة عن الزمن

نعتبر متحركا في حركة مستقيمة متغيرة بانتظام في موضعين مختلفين G_1 و G_2 :

$$G_2 \begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + V_0t_2 + x_0 & (2) \\ V_2 = at_2 + V_0 & (2') \end{cases} \quad \text{و} \quad G_1 \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + V_0t_1 + x_0 & (1) \\ V_1 = at_1 + V_0 & (1') \end{cases}$$

من العلاقة (1') نستنتج : $t_1 = \frac{V_1 - V_0}{a}$ و بتعويض t_1 في المعادلة (1) نجد :

$$x_1 = \frac{1}{2}a \left(\frac{V_1 - V_0}{a} \right)^2 + V_0 \left(\frac{V_1 - V_0}{a} \right) + x_0$$

$$(3) \quad V_1^2 - V_0^2 = 2a(x_1 - x_0) \quad \text{و بالتالي :}$$

من العلاقة (2') نستنتج : $t_2 = \frac{V_2 - V_0}{a}$ و بتعويض t_2 في المعادلة (2) نجد كذلك :

$$(4) \quad V_2^2 - V_0^2 = 2a(x_2 - x_0)$$

ب طرح المعادلتين (3) و (4) نحصل على :

$$V_2^2 - V_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$$

أمثلة لمخططات الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام

