

التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

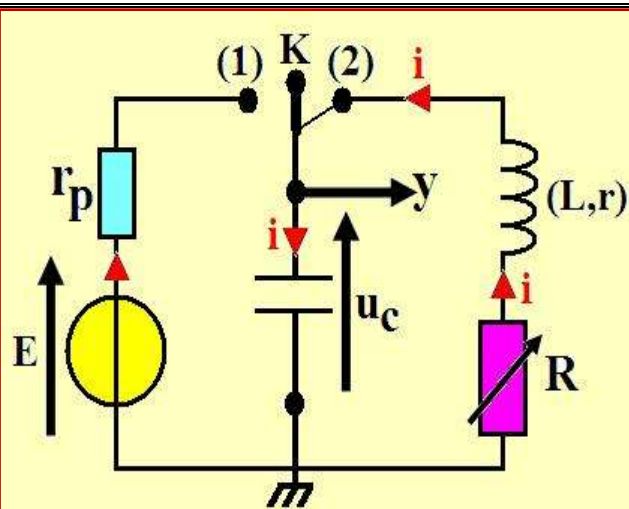
الدرس الثامن

Les oscillations libres dans un circuit RLC série

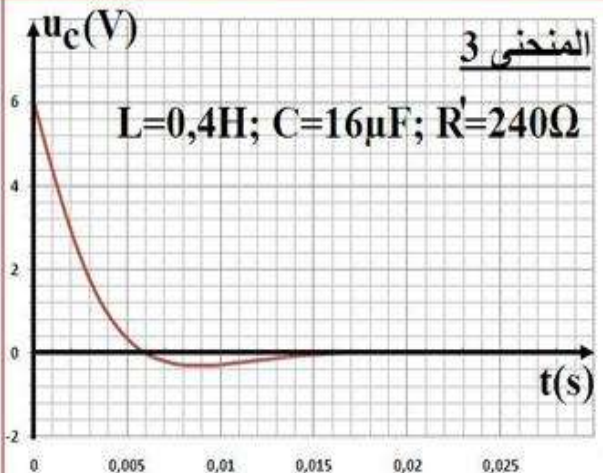
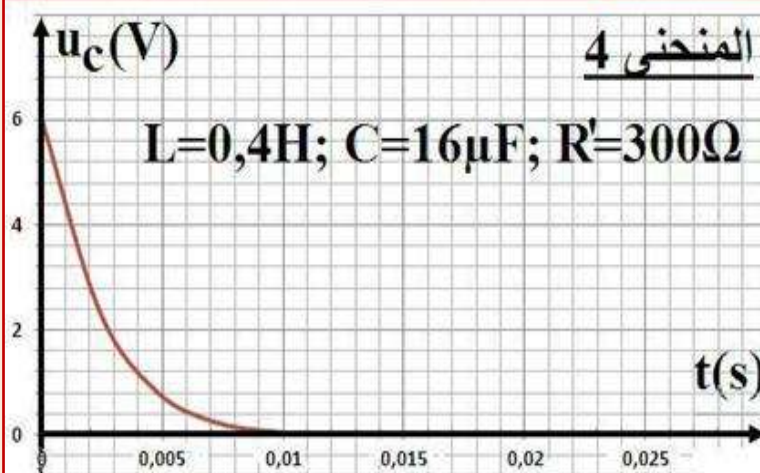
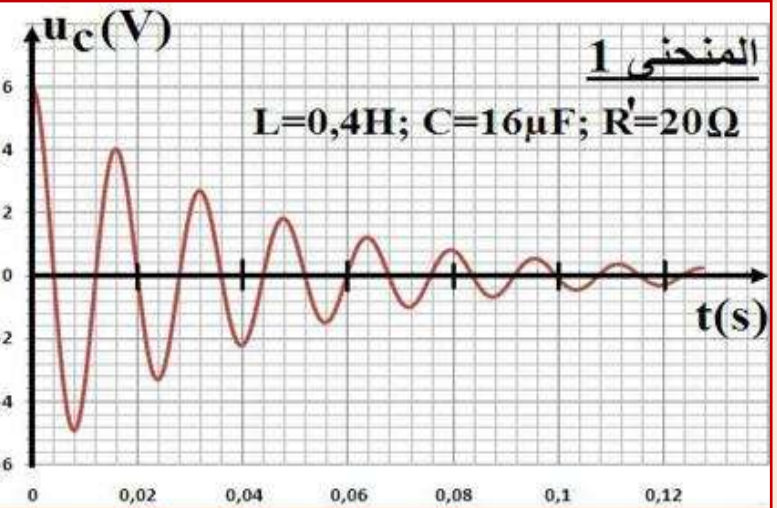
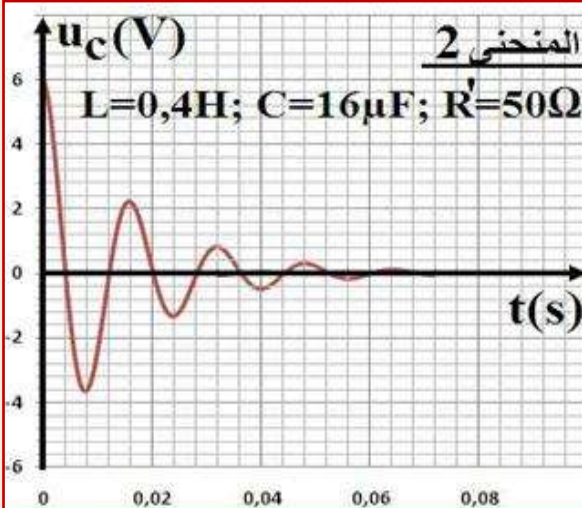
I. تفريغ مكثف في وشيعة في دارة متوالية RLC.

1. الدراسة التجريبية للدارة المتوالية RLC:

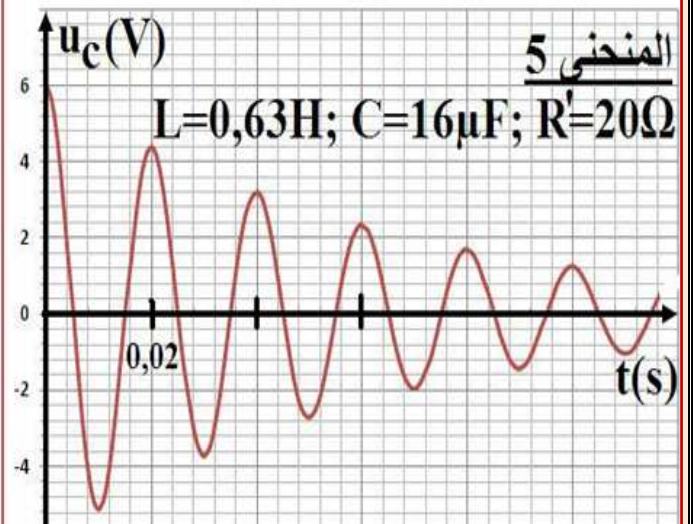
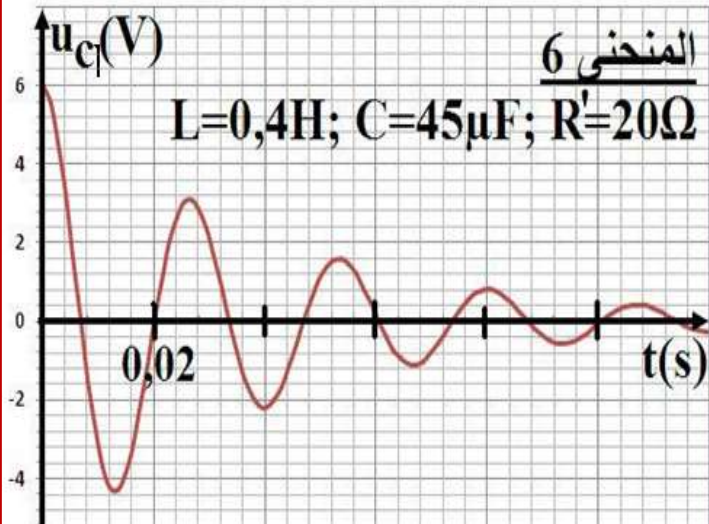
أ. نشاط تجريبي 1:



نعتبر التركيب التجريبي الممثل جانبية و المكون من مولد مؤمّل قوته الكهرمحركة $E=6V$ ، مكثف سعته C ، وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها r ، موصل أومي مقاومته R . كل من R و L و C قابلة للضبط. بعد مدة زمنية طويلة من شحن المكثف نضع قاطع التيار فيلا الموضع (2) و نعاين بواسطة راسم تذبذب ذاكراتي التوتر u_c بين مربطي المكثف (أنظر الشكل). نضبط سعة المكثف على القيمة $16\mu F$ و معامل تحريض الوشيعة على القيمة $0,4H$ ، ونقوم بتغيير قيمة مقاومة الموصل الأومي R بحيث تكون المقاومة الكلية للدارة هي $R'=R+r$ ، وفي كل مرة نحصل على منحنى من المنحنيات التالية:



نضبط الآن المقاومة الموصل الأومي R لتكون قيمة المقاومة الكلية للدائرة هي $R'=20\Omega$ ، ونقوم بتغيير قيمة السعة أو معامل التحريض، فنحصل على المنحنيين التاليين:



• تأثير المقاومة الكلية $R'=R+r$:

- (1) كيف يتغير وسع وإشارة التوتر u_C مع الزمن؟ وماذا نسمي تذبذبات الدارة RLC؟
التوتر u_C بين مربطي المكثف متناوب يتناقص وسعه بدلالة الزمن، نقول إن التذبذبات مخمدة. وبما أن هذه التذبذبات تتم دون تزويد الدارة RLC بأي طاقة بعد اللحظة $t=0$ نقول إن التذبذبات حرة.
- (2) حدد شبه الدور T بالنسبة للمنحنى 1 و 2.
عندما تكون المقاومة الكلية للدائرة صغيرة فإننا نحصل على نظام تذبذبات شبيه بالدوري يطلق عليه "نظام شبه دوري". يتميز هذا الأخير بشبه الدور T الذي في هذه الحالة يساوي $T=0,016s=16ms$.
- (3) ما تأثير R على وسع وإشارة التوتر u_C ؟
عندما تزداد قيمة المقاومة R يزداد خمود التذبذبات حيث نلاحظ أن وسع التذبذبات ينقص كثيرا.
- (4) ماذا يحدث عندما تصبح R كبيرة جدا؟
عندما تصبح R كبيرة جدا تزول التذبذبات حيث يتناقص الوسع تدريجيا إلى أن ينعدم، و نميز في هذه الحالة بين نظامين هما: نظام حرج (المنحنى 3) و نظام لا دوري (المنحنى 4).
- (5) ماذا يحدث عندما تصبح R مهملة؟
عندما تصبح R مهملة يزول خمود التذبذبات أي أن وسع التذبذبات يبقى ثابتا، و بهذا يكون نظم التذبذبات دوري جيبى مع مرور الزمن.

• تأثير L و C :

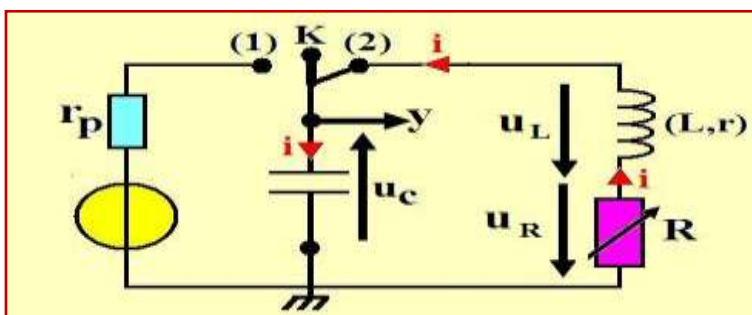
- (6) ماذا يحدث عندما نغير قيمة L ؟
نلاحظ أنه عند الزيادة في قيمة معامل تحريض الوشيعية L تزداد قيمة شبه الدور T للتذبذبات.
- (7) ماذا يحدث عندما نغير قيمة C ؟
نلاحظ أنه عند الزيادة في قيمة سعة المكثف C تزداد قيمة شبه الدور T للتذبذبات.

ب. خلاصة:

يؤدي تفريغ مكثف في وشيعية في دارة متوالية RLC إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة. نقول إن الدارة RLC المتوالية تكون متذبذبا كهربائيا حرا ومخمدا.

2. الدراسة النظرية للدائرة المتوالية RLC:

نعتبر التركيب التجريبي الممثل جانبة والمكون من مكثف سعته C ، وشيعية معامل تحريضها L ومقاومتها الداخلية r ، و موصل أومي مقاومته R .
نؤرجح قاطع التيار K إلى الموضع (2) بعد شحن المكثف عند لحظة $t = 0$.



حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_R + u_C = 0$ (1)

حسب قانون أوم: $u_R = R \cdot i$ و $u_L = L \cdot \frac{di}{dt}$

تصبح المعادلة (1) كما يلي: $L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i + u_C = 0$

كما نضع أن: $R' = R + r$ فتصبح المعادلة: $L \cdot \frac{di}{dt} + R' \cdot i + u_C = 0$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C \cdot u_C$ أي أن: $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ أي $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$

و بتعويض i و $\frac{di}{dt}$ بتعبييريهما في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف في دائرة متوالية RLC:

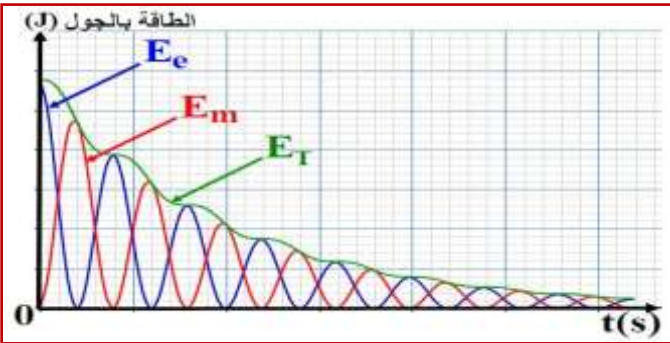
$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \Leftrightarrow LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R' C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

ملاحظة:

- بتعويض $u_C(t)$ بـ $\frac{q}{C}$ في المعادلة التفاضلية السابقة، نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$ ، ونكتب كما يلي: $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R'}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$
- المقدار $\frac{R'}{L} \cdot \frac{du_C}{dt}$ هو المسؤول عن ظاهرة خمود التذبذبات.

3. الدراسة الطاقية للدائرة المتوالية RLC:

إن الطاقة الكلية E_T في الدائرة RLC تتناقص خلال كل تبادل طاقي بين المكثف و الوشيعية نتيجة وجود المقاومة الكلية للدائرة R' و التي تبدد الطاقة الكلية مع مرور الزمن إلى طاقة حرارية بمفعول جول. ولبرهنة على أن الطاقة الكلية تتناقص مع مرور الزمن، يجب أن نبين أن: $\frac{dE_T}{dt} < 0$



لدينا الطاقة الكلية للدائرة هي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_C^2$

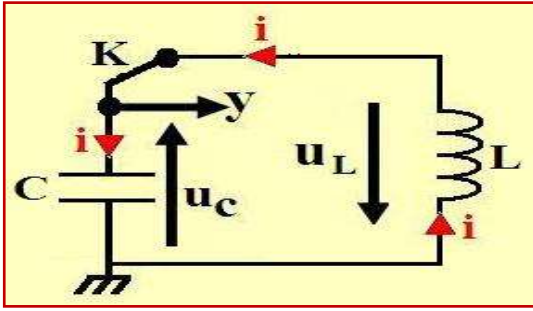
$$\frac{dE_T}{dt} = LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + C \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot u_C \quad \text{أي:} \quad \frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} L \cdot 2 \cdot \frac{di}{dt} \cdot i + \frac{1}{2} C \cdot 2 \cdot \frac{du_C}{dt} \cdot u_C$$

$$(1) \quad \frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \times (LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C) \quad \text{أي أن:}$$

و لدينا المعادلة التفاضلية: $LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + R' C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ أي أن: $LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = -R' C \cdot \frac{du_C}{dt}$

$$\frac{dE_T}{dt} = -R' \cdot i^2 < 0 \quad \text{أي أن:} \quad \frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{du_C}{dt} \times (-R' C \cdot \frac{du_C}{dt}) \quad \text{كما يلي:}$$

و بالتالي، الطاقة الكلية في دائرة RLC متوالية دالة تناقصية للزمن.



II. التذبذبات غير المخمدة في الدارة المثالية LC.

1. تعريف الدارة المثالية LC:

نعتبر الدارة الممثلة جانبه و المكونة من مكثف ذو سعة C ووشية معامل تحريضها L ومقاومتها منعدمة ، تسمى هذه الدارة **بالمثالية** لصعوبة تحقيقها تجريبيا نظرا لتوفر الوشية على مقاومة داخلية ناتجة عن أسلاك لفاتها، إضافة إلى مقاومة أسلاك الربط.

2. الدراسة النظرية للدارة المثالية LC:

أ. المعادلة التفاضلية:

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_C = 0$

$$\text{أي : } L \cdot \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$\text{ونعلم أن: } i = \frac{dq}{dt} \text{ و } q = C \cdot u_C \text{ أي أن: } i = C \cdot \frac{du_C}{dt} \text{ أي } \frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

و بتعويض $\frac{di}{dt}$ بتعبيرها في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف في الدارة المثالية LC:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \Leftrightarrow LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

ملاحظة:

■ بتعويض $u_C(t)$ بـ $\frac{q}{C}$ في المعادلة التفاضلية السابقة، نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة $q(t)$ ،

$$\text{وتكتب كما يلي: } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$

ب. حل المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0$ معادلة خطية من الدرجة الثانية، رياضيا يكتب حلها على الشكل التالي:

$$u_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ بحيث :}$$

- U_m : وسع التذبذبات وحدته الفولط (V).
- φ : الطور عند الأصل بالراديان (rad).
- T_0 : الدور الخاص للتذبذبات وحدته الثانية (s).
- $\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi$: الطور عند اللحظة t بالراديان (rad).

♦ تحديد تعبير الدور الخاص T_0 :

لدينا $u_C(t) = U_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$ و بالاشتقاق الأول نجد: $\frac{du_C}{dt} = -U_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

$$\text{وكذلك: } \frac{d^2 u_C}{dt^2} = -U_m \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right) \text{ أي أن: } \frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot u_C(t)$$

و بتعويض $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$ بتعبيرها في المعادلة التفاضلية نجد: $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot u_C(t) + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0$

$$\text{أي : } u_c(t) = -\frac{1}{LC} \cdot u_c(t) - \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \cdot u_c(t) \text{ أي : } \frac{1}{LC} = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \text{ ومنه : } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC}$$

يتعلق الدور الخاص T_0 للتذبذبات الحرة غير المخمدة بـ L و C .

وحدة الدور الخاص في النظام العالمي للوحدات هي الثانية (s)، وذلك حسب معادلة الأبعاد التالية:

$$[T_0] = \sqrt{[L] \cdot [C]}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ لدينا : } i &= C \cdot \frac{du_c}{dt} \text{ أي : } [I] = [C] \cdot \frac{[U]}{[t]} \text{ ومنه : } [C] = [I] \cdot \frac{[t]}{[U]} \\ \bullet \text{ لدينا : } u_L &= L \cdot \frac{di}{dt} \text{ أي : } [U] = [L] \cdot \frac{[I]}{[t]} \text{ ومنه : } [L] = [U] \cdot \frac{[t]}{[I]} \end{aligned}$$

$$\text{أي أن : } [T_0] = \sqrt{[U] \cdot \frac{[t]}{[I]} \cdot [I] \cdot \frac{[t]}{[U]}} = \sqrt{[t]^2} = [t]$$

و منه : $[T_0] = [t]$ وبالتالي فإن للدور الخاص بعد زمني.

♦ تحديد U_m و φ بالشروط البدئية:

باعتبار الشروط البدئية للتوتر u_c و شدة التيار i أي عند اللحظة $t = 0$ لدينا:

- التوتر $u_c(0) = U_m \cdot \cos(\varphi) = E$ و أن المكثف مشحون بدنياً أي: $u_c = U_m \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$
 - شدة التيار $i(0) = -CU_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi) = 0$ و أن: $i(t) = -CU_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$
- $\sin(\varphi) = 0$ وهذا يعني أن φ حلان هما: $\varphi = 0$ أو $\varphi = \pi$.

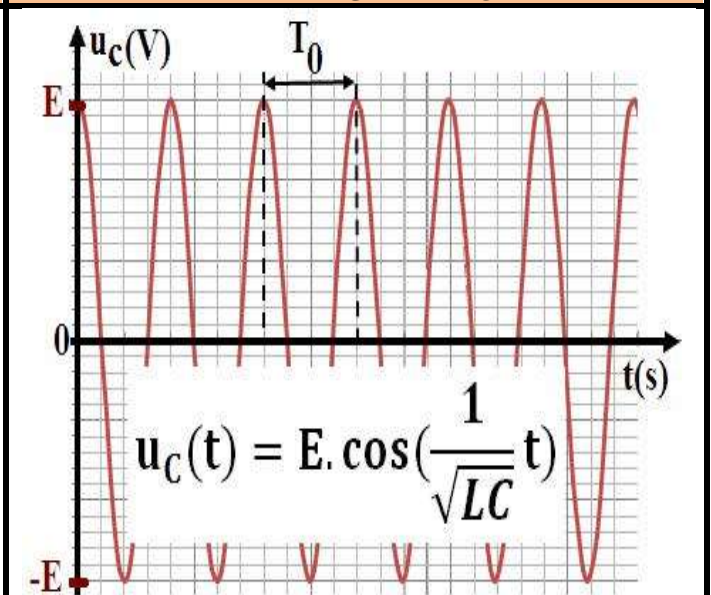
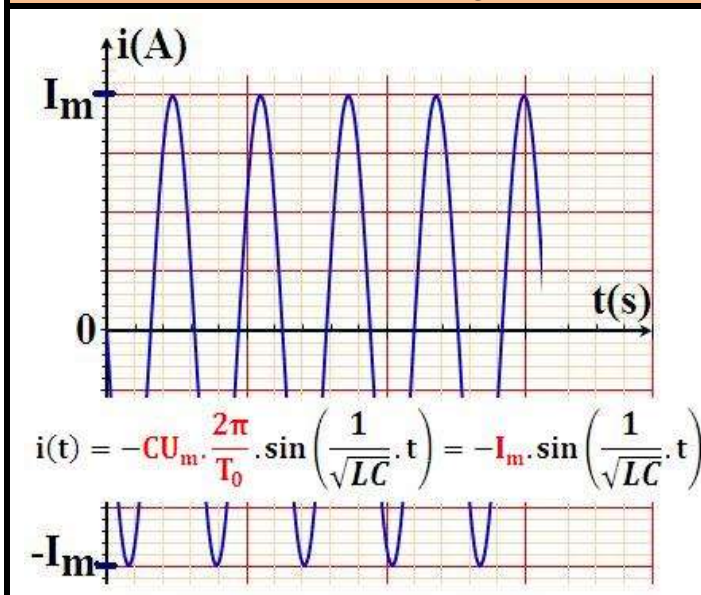
بما أن $U_m > 0$ و $E > 0$ فإنه من الواجب أن يكون $\cos(\varphi) > 0$ و منه فإن $\varphi = 0$ أي أن $U_m = E$.

و منه حل المعادلة التفاضلية يكتب كما يلي: $u_c(t) = E \cdot \cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

ج. منحنى تغيرات $u_c(t)$ و $i(t)$:

منحنى تغيرات i بدلالة الزمن

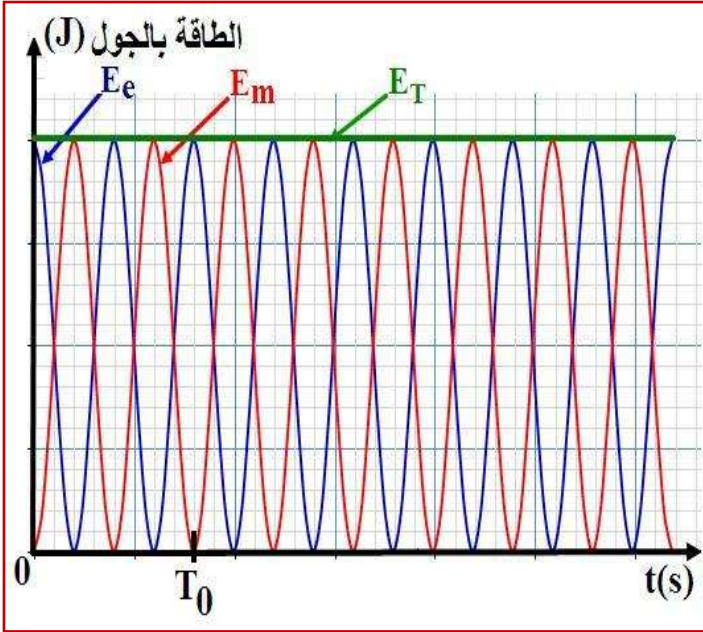
منحنى تغيرات u_c بدلالة الزمن



3. الدراسة الطاقية للدائرة المثالية LC: أ. الطاقة الكلية للدائرة المثالية LC:

الطاقة الكلية المخزونة في الدائرة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية E_e المخزونة في المكثف والطاقة المغناطيسية E_m المخزونة في الوشاعة، بحيث:
 $E_T = E_m + E_e$ أي: $E_T = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$.

يمثل الرسم جانبه تغيرات كل من E_m و E_e و E_T بدلالة الزمن، فعندما تنقص الطاقة الكهربائية E_e المخزونة بالمكثف، تزايد الطاقة المغناطيسية E_m في الوشاعة، والعكس صحيح. وهذا ما يسمى **بالتبادل الطاقى** بين المكثف والوشاعة. وبما أن المقاومة الكلية للدائرة **منعدمة** فإن الطاقة الكلية ثابتة مع مرور الزمن، ونقول أن الطاقة في الدائرة المثالية LC **تتحفظ**.



يمكن أن نعبر عن الطاقة الكلية للدائرة كما يلي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$

$$\text{أي: } E_T = \frac{1}{2} LC^2 U_m^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right) + \frac{1}{2} CU_m^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right)$$

$$\text{نعلم أن: } T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{LC} \text{ أي: } \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\text{أي أن: } E_T = \frac{1}{2} LC^2 U_m^2 \cdot \frac{1}{LC} \sin^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right) + \frac{1}{2} CU_m^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right)$$

$$\text{أي أن: } E_T = \frac{1}{2} CU_m^2 \left[\sin^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right) + \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t \right) \right]$$

$$\text{ومنه: } E_T = \frac{1}{2} CU_m^2 \text{ وبالمثل يمكن أن نبرهن أن: } E_T = \frac{1}{2} LI_m^2$$

ب. انحفاظ الطاقة الكلية للدائرة المثالية LC:

لدينا الطاقة الكلية للدائرة هي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{1}{2} Cu_c^2$

$$\text{أي: } \frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} L \cdot 2 \cdot \frac{di}{dt} \cdot i + \frac{1}{2} C \cdot 2 \cdot \frac{du_c}{dt} \cdot u_c \text{ أي: } \frac{dE_T}{dt} = LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} \cdot C \cdot \frac{du_c}{dt} + C \cdot \frac{du_c}{dt} \cdot u_c$$

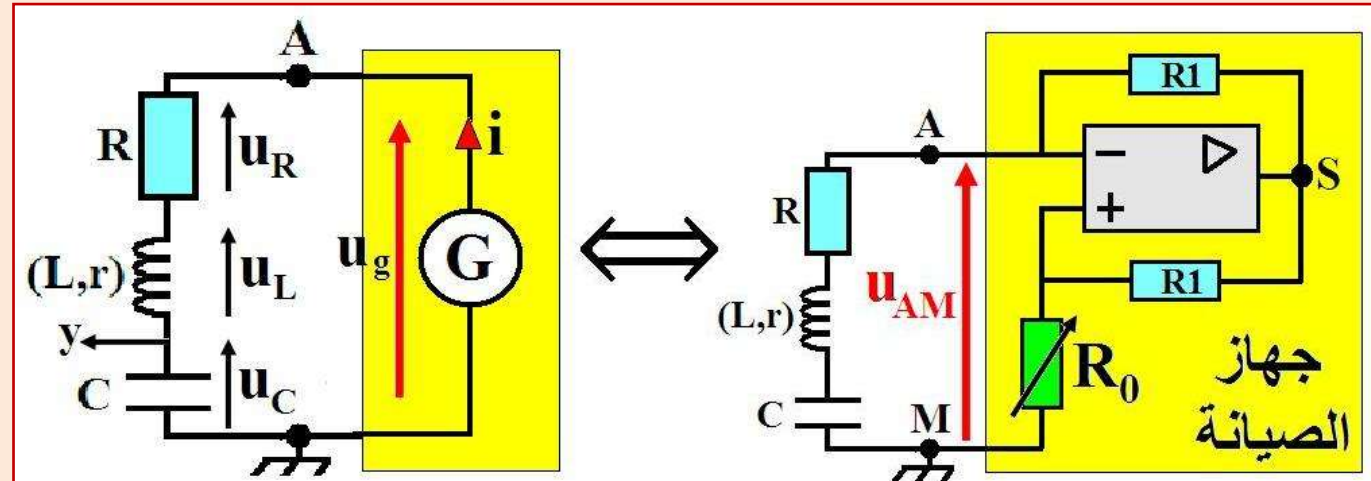
$$\text{أي أن: } \frac{dE_T}{dt} = C \cdot \frac{du_c}{dt} \times (LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c) \text{ ولدينا المعادلة التفاضلية: } LC \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + u_c = 0$$

ومنه فإن: $\frac{dE_T}{dt} = 0$ وبالتالي الطاقة الكلية في الدائرة المثالية LC **تتحفظ**.

III. صيانة التذبذبات في الدارة المتوالية RLC.

أ. نشاط تجريبي 2:

يمكن صيانة تذبذبات الدارة المتوالية RLC للحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز (جهاز الصيانة) يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول. للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC، ننجز التركيب الممثل في الشكل أسفله، حيث G مولد يزود الدارة بتوتر u_g يتناسب اطرادا مع i شدة التيار الذي يمر فيه بحيث: $u_g = R_0 \cdot i$. يتم الحصول على المولد G اعتمادا على التركيب الالكتروني الممثل في الشكل أسفله.



(1) بين أن التوتر بين مربطي المكثف يحقق المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R' - R_0}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0$

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_R + u_C = u_g$ (1)

حسب قانون أوم: $u_R = R \cdot i$ و $u_L = L \cdot \frac{di}{dt} + r i$

تصبح المعادلة (1) كما يلي: $L \cdot \frac{di}{dt} + r i + R i + u_C = R_0 i$

كما نضع أن: $R' = R + r$ فتصبح المعادلة: $L \cdot \frac{di}{dt} + R' \cdot i + u_C = R_0 i$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C \cdot u_C$ أي أن: $i = C \cdot \frac{du_C}{dt}$ أي $\frac{di}{dt} = C \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2}$

و بتعويض i و $\frac{di}{dt}$ بتعبيريهما في المعادلة السابقة نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$ بين مربطي المكثف في دارة متوالية RLC:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R' - R_0}{L} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot u_C = 0 \Leftrightarrow LC \cdot \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R' - R_0) \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

(2) استنتج القيمة التي يجب أن تأخذها R_0 للحصول على تذبذبات جيبية.

للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC يجب أن يتحقق الشرط التالي: $R' - R_0 = 0$ أي

$$R_0 = R'$$

ب. خلاصة:

يمكن صيانة تذبذبات الدارة المتوالية RLC للحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز يسمى جهاز الصيانة، يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC يجب أن تتساوى مقاومة الجهاز مع المقاومة الكلية للدارة المتوالية RLC.

التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية